EINLEITUNG

IN DIE TEORIE DER

EBENEN ELEMENTARKURVEN

DRITTER UND VIERTER ORDNUNG

VON

C. JUEL

D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, 7. Række, naturv. og mathematisk Afd. XI. 2

KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL

BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI

1914

EINLEITUNG

Zwischen den im projectivischen Sinne geschlossenen Jordankurven und den algebraischen Kurven liegen mehrere Klassen von mehr oder weniger spezializierten Kurven. Wir haben in dieser Arbeit mit denjenigen Kurven zu thun, welche höchstens eine endliche und im voraus gegebene Zahl von Punkten mit einer Geraden gemein haben. Die höchste und erreichbare Zahl von Schnittpunkten kann man die Realitätsordnung der Kurve nennen; in der vorliegenden Arbeit, wo von algebraischen Kurven keine Rede ist, habe ich jedoch überall die kürzere Benennung: „Ordnung der Kurve" gebraucht.

Wir setzen aber noch voraus, dass die Kurve völlig stetig ist, d. h. dass sie im jedem Punkte (von Punkten in endlicher Zahl abgesehen) eine bestimmte mit dem Berührungspunkte sich stetig ändernde Tangente haben. Für diese Kurven gelten wesentliche Teile der folgenden Satzreihe. Vollständig durchgeführt sind die Betrachtungen doch nur für die Elementarkurven, d. h. Kurven, welche aus einer endlichen Zahl von konvexen Bögen oder Elementarbögen zusammengesetzt sind.

In § 1 sammle ich — wesentlich ohne Beweis — die zwei Gruppen von Sätzen über Elementarbögen, welche die Grundlage des folgenden bilden. Die erste von diesen Gruppen ist schon 1884 von H. Brunn vollständig aufgestellt worden, jedoch ohne Beweise[1]. In einfachster Form sind diese wohl von J. Hjelmslev gegeben, der auch a. a. Orte mehrere andere Sätze über Elementarbögen und Elementarkurven aufgestellt hat[2]. Von etwas anderer Art ist die zweite Gruppe von Sätzen über die Schnittpunkte der Tangenten eines Elementarbogens mit einer Geraden oder mit einer anderen Elementarkurve. Es sind dies die Sätze, welche von A. Kneser die v. Staudt'schen Sätze genannt worden sind[3].

[1] Sitz.-berichte der Math.-Phys. Classe der k. bayr. Akad. d. Wissensch. in München Bd. XXIV 1894, S. 93: Exacte Grundlagen für eine Theorie der Ovale.

[2] Nyt Tidssk. f. Math. 1905, S. 81: Om konvexe Omraader, und ebd. 1907, S. 49: Om Grundlaget for Læren om simple Kurver.

[3] Math. Ann. Bd. 34, 1889, S. 204: Allgemeine Sätze über die scheinbaren Singularitäten beliebiger Raumkurven. Siehe auch desselben Verfassers: Einige allgemeine Sätze über die einfachsten Gestalten ebener Curven, Math. Ann. Bd. 41, 1893, S. 349.

In § 2 werden zwei Elementarbögen an einander gestellt. Es ist hier keine Rede von Berührungen verschiedener Ordnung u.d.; nur durch eine mehr begrenzende Definition des Elementarbogens würde dies einen Sinn geben. Am Schluss wird die „Abrundung eines Winkelpunktes" eingeführt, was das erste Hauptmittel der folgenden Untersuchung bildet.

In § 3 wird das eigentliche Untersuchungsobject eingeführt: die Elementarkurve endlicher Ordnung. Hieran knüpft sich das zweite, später zu benutzende Hilfmittel, nämlich das Zerlegen einer Kurve in zwei von einem Doppelpunkte ausgehende Pseudozweige; zugleich wird bewiesen, dass die Abrundung der Winkelpunkte einer Kurve die Ordnung derselben nicht erhöhen kann.

Im folgenden § 4 stelle ich das elementare Korrespondenzprinzip auf, und es ist dies das dritte wesentliche Hilfsmittel. Der Satz ist in mehr oder weniger allgemeiner Form schon mehrmals aufgestellt und benutzt worden. Es ist in der That eine directe Folge der Satzes, dass eine stetige, im Endlichen verlaufende Kurve, welche einen Punkt auf jeder Seite einer Geraden hat, dieselbe schneiden muss. Ich habe für den Satz einen — nicht von mir herrührenden — Beweis gewählt, der diesen Sachverhalt am deutlichsten zum Ausdruck bringt[1]. Wenn auch der Satz, wie gesagt, nicht neu ist, glaube ich doch durch die Formulierung denselben handlicher gemacht zu haben.

Durch die genannten Hilfmittel werden nun die für die Klassifikation wichtigsten Eigenschaften der Kurven dritter und vierter Ordnung gewonnen; Sätze, welche für die Klassifikation belanglos sind, habe ich ganz weggelassen. Die Kurven dritter Ordnung sind schon bekannt; doch finden sich hier einige neue Sätze, welche für das folgende nothwendig sind.

Die Kurven dritter Ordnung sind Elementarkurven, wenn sie völlig stetig sind. Dies gilt nicht mehr für die Kurven vierter Ordnung. Hier begrenze ich noch die Aufgabe in zweifacher Weise. Erstens betrachte ich nur die einteilige Kurve[2]. Freilich lässt sich auch etwas über mehrteilige (vollständige) Kurven vierter Ordnung sagen; eine sichere Klassifikation der einteiligen ist aber jedenfalls eine nothwendige Grundlage. Zweitens nehme ich die Zahl der Doppelpunkte als endlich an, was selbst für einteilige Elementarkurven nicht nothwendig wäre. Die Klassifikation und die Bestimmung der Art und Lage der singulären Punkte der so begrenzten Klasse von Kurven vierter Ordnung geschieht nun Schritt für Schritt ganz mit derselben Sicherkeit, als wenn man eine Gleichung als Grundlage hätte. Die Einteilung stützt sich wesentlich auf die Möglichkeit von zwei verschiedenen Arten von Doppelpunkten, wobei sich herausstellt, das eine Kurve, deren Doppel-

[1] Siehe A. K. Erlang: Lidt om det grafiske Korrespondanceprincip. Nyt Tidssk. f. Math. 1906, S. 58.

[2] Infolge dieser Begrenzung fällt die hier für Elementarkurven vierter Ordnung gelöste Aufgabe nicht ganz mit der analogen Aufgabe für algebraische Kurven zusammen, denn im letzteren Falle wird ein Hauptgewicht auf die Zahl und Verteilung der Zweige gelegt; siehe H. G. Zeuthen, Sur les différentes formes des courbes planes du quatrième ordre, Math. Ann. Bd. 7, 1874, S. 410. Es ist übrigens kaum nöthig zu bemerken, dass diese Arbeit auf die ganze Fragestellung den grössten Einfluss gehabt hat.

punkte nicht alle derselben Art sind, sich in unpaare Pseudozweige zerlegen lässt. Der Kürze wegen werden die Kurven mit Spitzen oder mit einem dreifachen Punkte etwas summarisch behandelt; dasselbe gilt auch für die Konstruktionen mittels zweier Ovale, wobei man nicht vergessen darf, dass es sich hier lediglich um Beispiele handelt.

Nachdem die Kurven vierter Ordnung klassificiert waren, lag es nahe auch die einteiligen Kurven vierter Klasse aufzuzählen, um so mehr als die verschiedenen Formen auch nur für algebraische Kurven kaum an einem Orte gesammelt worden sind. Ich thue dies in aller Kürze in § 14.

Die vorliegende Arbeit ist in gänzlicher Umarbeitung eine Zusammenstellung verschiedener Abschnitte zweier älteren Arbeiten, die in den Abh. der k. dän. Akad. d. Wissensch. erschienen sind[1]. Ich hatte ursprünglich die Absicht etwas aus der Theorie der Kurven zweiter Ordnung mitzunehmen, wobei neben gewissen Sätzen allgemeinerer Art, die besonders von Brunn aufgestellt worden sind[2], besonders diejenigen Ovale zu betrachten wären, welche für die Konstruction von Kurven höherer Ordnung von Bedeutung sind. Es handelt sich in letzterer Beziehung teils um die cyclischen Ovale (welche von einem Kreise höchstens in vier Punkten geschnitten werden)[3], teils und besonders um die elliptisch konvexen Ovale. Es wurde dies zu weitlaüfig; ich hoffe aber durch den Schlussparagraf ein neues Beispiel für das Interesse, das sich an die zuletzt genannten Ovale knüpft, gegeben zu haben.

[1] D. K. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, 6. Række, naturv. og math. Afd. X, 1. 1899: Indledning i Læren om grafiske Kurver; ebd. 7. Række, I, 6. 1906: Om Ikke-analytiske Kurver.

[2] Siehe H. Brunn: Über Ovale und Eiflächen. Diss. München 1887, und: Curven ohne Wendepunkte, Habilitationssch. München 1889.

[3] Om cykliske Kurver, D. K. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter. 1911.

København, December 1913.

§ 1.

Der Elementarbogen.

Unter einem im Endlichen liegenden Elementarbogen AB werden wir die Punktmenge verstehen, welche mit dem endlichen Geradenstück $\overline{AB}$ zusammen die vollständige Begrenzung eines konvexen Gebietes bildet. Das Gebilde ist wie bekannt stetig und lässt sich stetig und gegenseitig eindeutig auf einem Geradenstück abbilden. Wenn nicht ausdrücklich anderes bemerkt wird, denken wir uns, dass der Bogen kein Geradenstück enthält.

Wir werden im folgenden auch Elementarbögen betrachten, welche ins unendliche gehen. Diese definieren wir einfach im projektiven Sinne als Projektionen endlicher Elementarbögen, und wir können uns deshalb bei den folgenden (projektiven) Sätzen mit dem endlichen Bogen begnügen.

(1) Ein Elementarbogen hat in jedem Punkte jedenfalls eine „nach vorn", und eine „nach hinten" gerichtete Tangente; wenn nicht anderes ausdrücklich bemerkt wird, setzen wir voraus, dass diese zwei zusammenfallen. Die Tangenten des Bogens folgen dann stetig auf einander, und eine Gerade, welche den Bogen in zwei beliebig nahe an einander liegenden Punkten schneidet, wird einer Tangente beliebig nahe liegen. Es sei M ein Punkt des Bogens, der kein Endpunkt ist, P ein von M verschiedener Punkt der Tangente in M. Verbindet man dann P mit einem Punkte M_1 des Bogens, der M beliebig nahe liegt, wird die Gerade PM_1 den Bogen in noch einem, M beliebig nahe liegenden Punkte M_2 schneiden. Von der Tangente kann man sagen, dass sie den Bogen in zwei zusammenfallenden Punkten schneidet.

(2) Aus den Eigenschaften des konvexen Gebietes folgt, dass eine Gerade höchstens zwei Punkte mit der Begrenzung desselben gemein haben kann. Eine Gerade, welche durch einen inneren Punkt des konvexen Gebietes geht, hat zwei getrennte
(3) Punkte mit der Begrenzung desselben gemein. Desshalb wird jede Gerade der Ebene, welche mit dem endlichen Geradenstück $\overline{AB}$ einen Punkt gemein hat (aber nicht mit AB zusammenfällt) einen und nur einen Punkt mit dem Bogen AB gemein haben, während eine Gerade, welche einen Punkt der Verlängerung von $\overline{AB}$ enthält, entweder 0 oder auch 2 Punkte mit dem Bogen gemein haben wird — die aber auch in einen Berührungspunkt einer Tangente zusammenfallen können.

(4) Man hat noch den wichtigen Satz, dass ein stetiger Bogen, der mit einer Geraden höchstens zwei Punkte gemein hat, nothwendigerweise ein Elementarbogen ist.

Durch einen Punkt des Inneren des konvexen Gebietes geht keine Tangente (5)
des Bogens. Aus den Eigenschaften eines konvexen Gebietes folgt aber, dass aus jedem Punkte P ausserhalb des Gebietes immer zwei „Grenzgerade“ gehen, d. h. Gerade, welche mit der Begrenzung einen und nur einen Punkt gemein haben — oder auch speciell ein Geradenstück; das letztere kann aber hier nur der Fall sein, wenn P auf der Verlängerung von $\overline{AB}$ liegt. Grenzgerade können entweder Tangenten des Bogens sein oder auch Gerade, die durch einen Endpunkt des Bogens gehen, sonst aber keinen Punkt mit diesem gemein haben. Aus dem beliebigen Punkte P der Ebene gehen also höchstens zwei Tangenten des Bogens, und schneiden von den Geraden PA und PB 0, 1 oder 2 den Bogen, dann gehen aus P 2, 1 oder 0 Tangenten an den Bogen. Durch jeden Punkt der Geraden AB, welcher nicht auf dem Geradenstück $\overline{AB}$ liegt, geht eine und nur eine Tangente des Bogens. Überschreitet P eine Endtangente des Bogens, wird demnach hier eine von P ausgehende Tangente gewonnen oder verloren. Nur durch Überschreiten einer Endtangente oder durch Überschreiten der Bogen wird die Zahl, der aus P an diesen gehenden Tangenten geändert — im letzten Falle mit 2.

Ist a eine Endtangente des Bogens AB in A, kann man sagen, dass eine be- (6)
stimmte Halbgerade den Bogen berührt, nämlich diejenige in a liegende von A ausgehende Halbgerade $\overline{a}$, die in derselben von AB begrenzten Halbebene $\overline{\pi}$ liegt, wie der Bogen selbst. Jede durch A gehende Halbgerade, welche in dem durch $\overline{a}$ und die Halbgerade $\overline{AB}$ begrenzten und in π liegenden Halbwinkelraume enthalten ist, wird einen Punkt mit dem Bogen gemein haben.

Ein Elementarbogen AB hat zwei Seiten; diejenige, die von von den Punkten (7)
des zugehörigen konvexen Gebietes erreichbar ist, können wir die negative Seite des Bogens nennen, während wir die andere die positive Seite nennen. Ist CD ein Teil von AB, wird die positive Seite von CD dieselbe sein, ob sie allein oder als ein Teil von AB aufgefasst wird.

Das dualistische Gebilde zu den Punkten und Tangenten eines Elementar- (8)
bogens wird aus den Tangenten und Punkten eines ebensolchen Bogens gebildet.

Wenn ein Punkt P der Ebene sich einem Punkte M des Bogens beliebig nähert — der jedoch kein Endpunkt ist — dann gehen, wenn P sich M hinreichend genähert hat, aus P entweder keine Tangenten oder auch zwei, die der Tangente m in M beliebig nahe liegen. Im ersten Falle liegt P auf der negativen Seite, im zweiten auf der positiven Seite der Bogens. Nur so können sich zwei durch P gehende Tangenten beliebig nähern.

Es sei α ein Elementarbogen, dessen Tangenten sämtlich einen andern Ele- (9)
mentarbogen β schneiden; es mögen vorerst die zwei Bögen keine Tangente und keinen Punkt mit einander gemein haben. Eine Tangente m an α kann demnach nicht β in zusammenfallenden Punkten schneiden, und man kann, indem der Berührungspunkt M von m sich auf α bewegt, die Bewegung eines bestimmten Schnittpunktes N von m mit β verfolgen. Wenn M auf α sich in einem bestimmten Sinne stetig bewegt, dann wird auch N auf β sich stetig ändern, weil die Tangenten eine

stetige Reihe bilden. Aber es wird auch N sich auf β in einem bestimmten Sinne bewegen, weil sonst durch einen Punkt von β zwei einander beliebig nahe liegende Tangenten an α gehen würden, was ausgeschlossen ist, wenn jeder Punkt von β in endlicher Entfernung von jedem Punkte von α liegt.

(10) Setzen wir jetzt voraus, dass α und β wieder keine Tangente, dagegen aber einen und nur einen Punkt C — der kein Endpunkt ist — mit einander gemein haben. Wenn nun M einem Teilbogen $BC = \alpha_1$ von α entlang in einem bestimmten Sinne sich stetig C beliebig nähert, dann wird auch der Schnittpunkt N sich stetig C beliebig nähern, und zwar auf einem Teilbogen β_1 von β, der auf der positiven Seite von α liegt. Wenn nun M sich in demselben Sinne auf einem Teilbogen $CB = \alpha_2$ von α weiter fortbewegt, dann wird N sich immer stetig von C aus auf β fortbewegen und wieder auf der positiven Seite von α, also wieder auf β_1. Man sieht nun, dass N beim ersten Teil der Bewegung, wo M sich auf α_1 befand, immer in demselben Sinne sich bewegt haben muss, weil sonst durch einen Punkt von β drei Tangenten an α gehen würden, was ausgeschlossen ist. Dasselbe gilt beim zweiten Teil der Bewegung, aber die zwei Sinne müssen entgegengesetzt sein, weil C im ersten Falle der Endpunkt, im zweiten der Anfangspunkt des durchlaufenen Bogens β_1 ist.

In diesen Sätzen kann man β (aber nicht α) durch eine Gerade ersetzen — oder auch durch einen Bogen, der Geradenstücke enthält.

(11) Das letzt gewonnene Resultat lässt sich auch anders ausdrücken. Es seien wieder α und β zwei Elementarbögen, die keine Tangenten aber einen Punkt C, der kein Endpunkt ist, mit einander gemein haben. Wenn ein Punkt N einen Teilbogen $AC = \beta_1$ von β, der auf der positiven Seite von α liegt, von M nach C durchlaüft, dann gehen aus N, wenn β_1 hinreichend klein gewählt ist, an α zwei Tangenten m_1 und m_2, deren Berührungspunkte M_1 und M_2 in entgegengesetztem Sinne nach C konvergieren, wenn N nach C konvergiert.

Sind α und β zwei Elementarbögen, von denen man weiss, dass die gemeinsamen Punkte und Tangenten alle in endlicher Entfernung von einander liegen, dann kann man, wenn eine Tangente m von α (die keine Endtangente ist) den Bogen β schneidet, immer den Berührungspunkt M von m in einen Teilbogen α_1 von α hineinlegen, und einen entsprechenden Teilbogen β_1 von β so wählen, dass die oben genannten Sätze angewandt werden können.

(12) Auf diese Sätze kann man das Dualitätsprinzip anwenden. Ich bemerke besonders, dass, wenn eine Tangente m in einem bestimmten Sinne auf einem Elementarbogen α rollt, und dabei immer zwei Schnittpunkte N_1 und N_2 mit einem anderen, α nicht schneidenden Elementarbogen β auftreten, bis m in eine gemeinsame Tangente a von α und β hineinfallt, dann N_1 and N_2 im entgegengesetzten Sinne laufen, bis sie in dem Berührungspunkt von α mit β zusammenfallen.

§ 2.

Der aus zwei Elementarbögen zusammengesetzte Bogen.

Die im folgenden betrachteten Kurven sind aus Elementarbögen zusammengesetzt. Es sind demnach besonders diejenigen Punkte zu untersuchen, in welchen zwei Elementarbögen zusammenstossen; wir wollen uns an dieser Stelle an den Fall halten, dass diese in dem gemeinsamen Punkte dieselbe Tangente haben. Wir setzen noch voraus, dass die zwei endlichen Bögen $\beta = BA$ und $\gamma = AC$ ausser A keinen Punkt mit einander gemein haben.

Die zwei Bögen berühren in A beide eine und dieselbe Gerade a, aber es giebt die zwei Möglichkeiten, dass die zwei in A berührenden Halbgeraden a_β und a_γ entweder entgegengesetzt sind oder zusammenfallen; wir werden diese zwei Möglichkeiten bzw. mit (A) und (B) bezeichnen. Ausserdem können die zwei Bögen entweder auf derselben Seite oder auf verschiedenen Seiten von a liegen. Nennen wir die zwei letzten Möglichkeiten (*1*) und (*2*), hat man die vier Fälle (A *1*), (A *2*), (B *1*), (B *2*) zu untersuchen, und diese Distinctionen sind für unsere fernere Zwecke hinreichend.

Wir wollen zuerst den Fall (A *1*) betrachten und zeigen, dass A in diesem Falle ein innerer Punkt eines neuen Elementarbogens wird. Ziehen wir die Gerade BC; wir können denn erstens annehmen, dass dieselbe nicht durch A geht, was jedenfalls durch Verkleinerung eines der Bögen erreicht werden könne. Ferner können wir annehmen, dass BC keine Punkte ausser B und C mit β und γ gemein hat. Sind nämlich B_1 und C_1 eventuelle neue Schnittpunkte, kann man β durch den Bogen AB_1 und γ durch den Bogen AC_1 ersetzen. Nachdem die ursprünglichen Bögen eventuell so verkleinert worden sind, kann man zeigen, dass $\beta + \gamma$ (wo β und γ jetzt die eventuellen neuen Bögen sind) ein Elementarbogen ist.

Es kommt nur darauf an zu zeigen, dass keine Gerade mehr denn zwei Punkte mit $\beta + \gamma$ gemein haben kann.

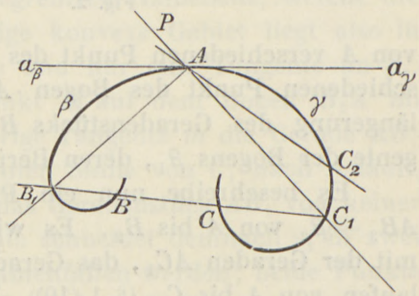

Fig. 1.

Wir zeigen erst, dass keine durch A gehende Gerade einen Punkt C_2 mit γ und zugleich einen Punkt B_2 mit β gemein haben kann. Wir nehmen an, dass B_2 auf der Strecke $\overline{AC_2}$ liegt — sonst könnte man β und γ umtauschen. Weil nun a_β und a_γ entgegengesetzt sind, liegt der Bogen β in der Nähe von A ausserhalb des durch γ und AC_1 begrenzten convexen Gebietes, und es müsste desshalb β, wenn der oben genannte Punkt B_2 vorhanden wäre, in dieses Gebiet eindringen. Weil aber β und γ keinen Punkt mit einander gemein haben, und β höchstens zwei Punkte mit der Geraden AC_1 gemein hat, würde auch B_1 in demselben Gebiete liegen müssen; dann würde aber gegen die Voraussetzung die Gerade C_1B_1 ausserhalb C_1 einen Punkt mit γ gemein haben.

Insbesondere gilt dies für AC_1 und AB_1, so dass β und γ auf verschiedenen Seiten jeder diesen Geraden liegen müssen.

Wir nehmen nun eine Gerade, welche mit der Strecke $\overline{AC_1}$ einen Punkt ausserhalb A und C_1, und zugleich mit der Strecke $\overline{AB_1}$ einen Punkt ausserhalb A und B_1 gemein hat. Dieselbe hat nach § 1 (3) einen Punkt mit jedem der Bögen β und γ gemein.

Wenn aber l einen Punkt P mit der Verlängerung von $\overline{AC_1}$ über C_1 gemein hat, kann l nicht gleichzeitig β und γ schneiden. Eventuelle Schnittpunkte mit β und γ müssen nämlich jedenfalls alle auf einer und derselben von P ausgehenden Halbstrahl l^* liegen, weil P und $\beta + \gamma$ auf verschiedenen Seiten von $B_1 C_1$ liegen; es kann aber l^* nicht gleichzeitig Punkte mit β und mit γ gemein haben, weil diese Bögen auf verschiedenen Seiten von PA liegen. Es gilt dies wie leicht zu sehen auch, wenn P in C_1 liegt.

Ganz ebenso führt man den Beweis, wenn l einen Punkt mit der Verlängerung von $\overline{AC_1}$ über A gemein hat; man braucht im obigen nur $B_1 C_1$ mit a umzutauschen.

Wir wollen nun den Fall ($A2$) betrachten, wo A ein I n f l e x i o n s p u n k t heisst. Die von A ausgehenden Halbstrahlen, welche A mit den Punkten von β und von γ verbinden, liegen hier in verschiedenen durch a begrenzten Halbebenen; weil a_β und a_γ entgegengesetzt sind, kann man also eine durch A gehende Gerade ziehen, welche β in einem Punkt B_1 und zugleich γ in einem Punkt C_1 schneidet. Es wird dann jede durch A gehende Gerade, welche einen von A verschiedenen Punkt des Bogens $B_1 A = \beta_1$ enthält, auch einen von A verschiedenen Punkt des Bogen $AC_1 = \gamma_1$ enthalten. (§ 1 (6)). C_1 liegt auf der Verlängerung des Geradenstücks $B_1 A$; aus C_1 geht desshalb eine und nur eine Tangente der Bogens β_1, deren Berührungspunkt B_2 sein möge (§ 1 (5)).

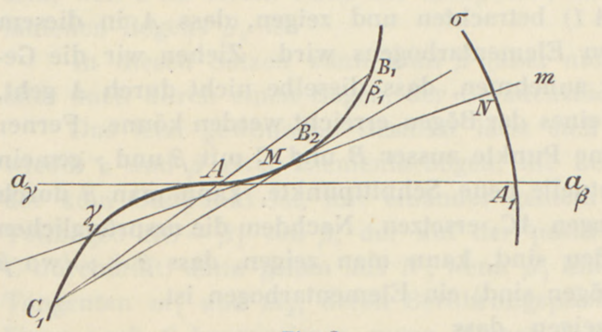

Fig. 2.

Es beschreibe nun ein Punkt M immer in demselben Sinne den Bogen $AB_2 = \beta_2$ von A bis B_2. Es wird dann der Schnittpunkt der Tangente m in M mit der Geraden AC_1, das Geradenstück AC_1 in einem bestimmten Sinne durchlaufen von A bis C_1 (§ 1 (10)). Deshalb wird jede Tangente m den Bogen γ_1 in einem und nur einem Punkte schneiden (§ 1 (2)), und den Bogen in demselben Sinne durchlaufen von A bis C_1. Man kann dies auch so ausdrücken, dass wenn ein Punkt M dem Bogen entlang in einem bestimmten Sinne gegen einen Inflexionspunkt A konvergiert, dann auch ein und nur ein Tangentialpunkt von M gegen A konvergieren wird.

Betrachten wir jetzt den Schnittpunkt N einer beweglichen Tangente m mit einem Bogen σ, der α in einem von A verschiedenen Punkte A_1 schneidet (durch den keine andere Endtangenten der Bögen α und β geht). Weil AN, wenn N dem Punkt A_1 hinreichend nahe ist, gleichzeitig die Bögen γ und β_1 schneidet oder nicht schneidet, wird AN auch gleichzeitig bzw. nicht Grenzgerade oder Grenzgerade der durch die genannten Bögen bestimmten convexen Gebiete sein (§ 1 (5)). Desshalb wird, wenn N dem Bogen σ entlang den Punkt A_1 überschreitet, zwei durch N gehende Tangenten an $\alpha_1 + \beta_1$ gewonnen oder auch zwei verloren gehen. Fällt N in A_1, fallen in α eine Tangente an β und eine an γ zusammen; liegt N hinreichend nahe an A_1, gehen also durch N zwei α naheliegende Tangenten an $\beta + \gamma$, wenn N auf der einen Seite von A_1 liegt, keine solche Tangenten aber, wenn N auf der anderen Seite von A_1 liegt.

Wenn der Berührungspunkt M von m den Bogen AB_2 in einem bestimmten Sinne stetig durchläuft, dann wird auch N sich stetig in einem bestimmten Sinne auf σ bewegen, bis M den Inflexionspunkt überschreitet; dann wendet aber der Bewegungssinn von N sich um. Es folgt dies aus dem eben gesagten, und es wird aus dem Grunde die Tangente in einem Inflexionspunkte auch Wendetangente genannt.

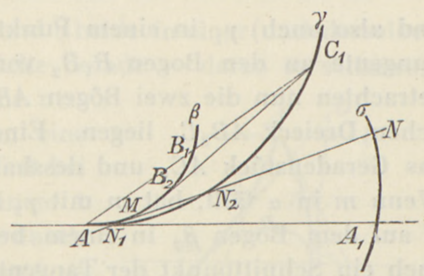

Fig. 3.

Betrachten wir jetzt den Punkt A im Falle (*B1*). Dreht man die in A berührende Halbgerade α einen hinreichend kleinen Winkel um A in die β und γ enthaltende Halbebene hinein, wird sie β in einem Punkte B_1 und gleichzeitig γ in einem Punkte C_1 schneiden; es möge B_1 auf der endlichen Strecke AC_1 liegen, und es mögen die Bögen AB_1 und AC_1 β_1 und γ_1 genannt werden. Diesse zwei Bögen liegen beide auf derselben Seite von AB_1, nämlich in derjenigen von AB_1 begrenzten Halbebene, welche die Halbgerade $\bar{\alpha}$ enthält. Das zum Bogen β_1 gehörige konvexe Gebiet liegt also in dem zum Bogen γ_1 gehörigen. Aus C_1 geht eine und nur eine Tangente an β_1. Ist der Berührungspunkt B_2, und läuft der Punkt M auf dem Bogen B_2A im demselben Sinne von B_2 nach A, wird die zugehörige Tangente m die Gerade AB_1 in einem Punkte schneiden, die in einem bestimmten Sinne von C_1 nach A läuft, und zwar durch den unendlich fernen Punkt, weil das Geradenstück AB_1 von keiner Tangente m geschnitten werden kann. Die Tangente schneidet demnach γ_1 in zwei Punkten N_1 und N_2, die in A und nur in A zusammenfallen werden; beide Punkte behalten ihren Bewegungssinn, wenn M von B_2 über einen Teilbogen von β_1 bis A läuft, und nähern sich also beide A, wenn M sich A nähert.

Bewegt sich ein Punkt N einem Bogen σ entlang, der α in einem von A verschiedenen Punkte A_1 schneidet, werden durch Überschreiten von A_1 zwei durch N an $\beta_1 + \gamma_1$ gehende Tangenten verloren oder gewonnen. Dies beweist man ebenso wie beim Inflexionspunkte, und daraus folgt weiter, dass die Tangente in einer „Schnabelspitze" eine Wendetangente in dem dort genannten Sinne ist.

Wir haben noch zuletzt den Fall (B 2) zu betrachten, wo A eine Dornspitze genannt wird. Man wähle auf β einen Punkt B_1 so, dass derjenige Winkel zwischen den Halbstrahlen $\bar{a}$ und AB_1, welcher in der β enhaltenden und durch a begrenzten Halbebene liegt, kleiner als $\frac{1}{2}\pi$ ist. In analoger Weise bestimmen wir einen Punkt C_1 auf γ. Wenn dann ein Punkt M den Bogen $AB_1 = \beta_1$ durchläuft, wird keine der Geraden AM den Bogen $AC_1 = \gamma_1$ schneiden, und umgekehrt. Die Bögen γ_1 und β_1 liegen beide auf derselben Seite der Geraden AB_1, nämlich in derjenigen durch AB_1 begrenzten Halbebene, welche die Halbgerade $\bar{a}$ enthält. Dreht man die Halbgerade B_1A um B_1 einen hinreichend kleinen Winkel in die genannte Halbebene hinein, dann wird sie β_1 in einem Punkte B_2 und (AC_1 und also auch) γ_1 in einem Punkte C_2 schneiden. Aus C_2 geht eine und nur eine Tangente an den Bogen B_1B_2 von β_1, und es sei B_3 der Berührungspunkt. Wir betrachten nun die zwei Bögen $AB_3 = \beta_2$ und $AC_2 = \gamma_2$, welche beide in dem endlichen Dreieck AB_3C_2 liegen. Eine beliebige Tangente m des Bogens β_2 schneidet das Geradenstück AC_2 und desshalb den Bogen γ_2 in einem und nur einem Punkte. Wenn m in a fällt, hat m mit γ_2 nur den Punkt A gemein. Wenn also ein Punkt M auf dem Bogen β_2 in einem bestimmten Sinne nach A konvergiert, dann wird auch ein Schnittpunkt der Tangente m mit der Kurve $\gamma_2 + \beta_2$ nach A konvergieren und zwar auf dieser Kurve im entgegengesetzten Sinne von M (siehe § 1 (9)).

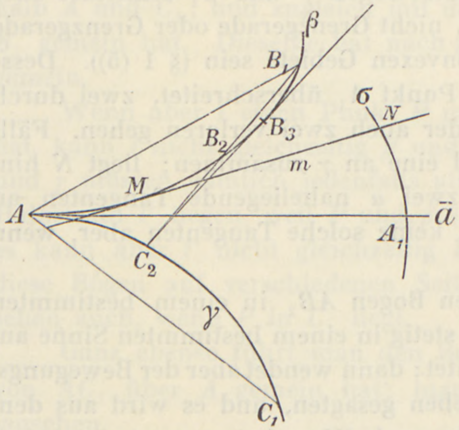

Fig. 4.

Bewegt sich ein Punkt N einem Bogen σ entlang so, dass er a in einem nicht mit A zusammenfallenden Punkte A_1 überschreitet, dann wird bei diesem Überschreiten die Zahl der aus N an $\gamma_2 + \beta_2$ gehenden Tangenten ungeändert. Es folgt dies daraus, dass beim Überschreiten ein Schnittpunkt von NA mit β verloren geht, wenn ein Schnittpunkt mit γ gewonnen wird, und umgekehrt. Schneiden die in einem bestimmten Sinne auf einander folgenden Tangenten m des Bogens $\gamma_2 + \beta_2$ einen nicht durch M gehenden Bogen σ in einem einzeln zu verfolgenden Schnittpunkte N, dann behält dieser Punkt seinen Bewegungssinn auch wenn m die Gerade a überschreitet; es folgt dies aus dem eben gesagten.

Die oben genannten Sätze zeigen offenbar, dass mittels Dualität eine Dornspitze in einen Inflexionspunkt übergeht, und umgekehrt, während eine Schnabelspitze selbstdualistisch ist.

Wir nennen an dieser Stelle nach den folgenden wichtigen Satz, wo ein Doppelpunkt im gewöhnlichen Sinne zu verstehen ist:

Ein Bogen ohne Doppelpunkte, Spitzen und Inflexionspunkte, dessen Tangenten stetig auf einander folgen und der mit seinen

Endtangenten nur deren Berührungspunkte gemein hat, ist ein Elementarbogen[1].

Der späteren Anwendungen wegen müssen wir noch die Möglichkeit in Betracht ziehen, dass die zwei Bögen $AB = \beta$ und $AC = \gamma$ in A zusammenstossen ohne da eine gemeinsame Tangente zu haben; der Bogen hat dann in A einen hervorspringenden Punkt oder kürzer einen Winkelpunkt: Die Tangenten des Bogens $\beta + \gamma$ bilden hier keine stetige Reihe; man kann dies aber durch eine „Abrundung“ erreichen; eine solche erhält man durch eine gewisse Ersetzung zweier dem Punkte A naheliegenden Teilbögen von β und γ durch einen Bogen σ, der von β in einem Punkte B_1 und von γ in einem Punkte C_1 berührt wird. Es seien b und c die zwei Tangenten in A, $\bar{b}$ und $\bar{c}$ die zwei β und γ in B_1 und C_1 berührenden Halbgeraden.

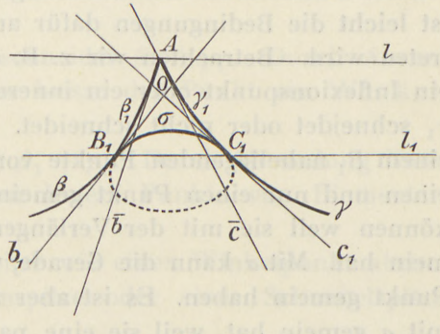

Fig. 5.

Durch A ziehe man eine Gerade l, so dass $\bar{b}$ und $\bar{c}$ beide in einer und derselben durch l begrenzten Halbebene π liegen. Eine solche Gerade — deren es selbstverständlich unendlich viele giebt — nennen wir eine uneigentliche Tangente in A. Man ziehe nun eine in π liegende mit l parallele Gerade l_1; diese wird bei hinreichender Nähe an l die Bögen β und γ in je einem A naheliegenden Punkte schneiden. Es sei π_1 diejenige durch l_1 begrenzte Halbebene, welche A enthält. Man kann l_1 so nahe an l wählen, dass die Winkel, welche die Tangenten b_1 und c_1 in den eben genannten Schnittpunkten B_1 und C_1 mit bzw. B_1A und C_1A bilden, so klein sind, als man will. Weil aber B_1A und C_1A mit l endliche Winkel bilden, die nicht unter einen gewissen Grösse fallen, kann man davon ausgehen, dass der Schnittpunkt $O = (b_1 c_1)$ in der Halbebene π_1 liegt. Nun legen wir ein Oval, das b_1 und c_1 bzw. in B_1 und C_1 berührt, ausser diesen keinen Punkt mit den Bögen β und γ gemein hat und A nicht in seinem Inneren enthält. Durch B_1C_1 wird das Oval in zwei Bögen geteilt; einen von diesen und zwar denjenigen, der in π_1 liegt, wählen wir als den Bogen σ, so dass wir also durch die Abrundung die Bögen $AB_1 = \beta_1$ und $AC_1 = \gamma_1$ durch σ ersetzen. β_1 und γ_1 mit $\overline{B_1C_1}$ zusammen begrenzen ein gewisses Gebiet ω; das durch σ und $\overline{B_1C_1}$ begrenzte Ge-

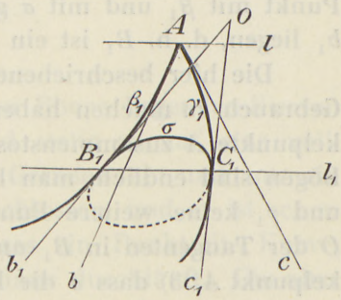

Fig. 6.

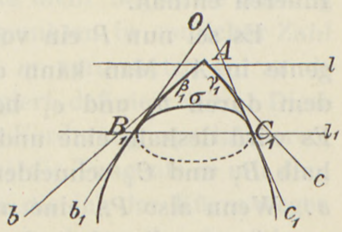

Fig. 7.

[1] Siehe: A. Kneser: Allgemeine Sätze über die scheinbaren Singularitäten beliebiger Raumcurven, Math. Annalen, Bd. 34, 1889, S. 209.

biet ω_1 ist ganz in ω enthalten. Die den Bogen B_1A und σ in B_1 berührenden Halbgeraden fallen zusammen, weil sie beide in π_1 liegen; deshalb wird den früheren Definitionen zufolge in B_1 sowie auch in C_1 durch die Abrundung entweder ein innerer Punkt einer Elementarbogens oder auch ein Inflexionspunkt entstehen: Es ist leicht die Bedingungen dafür auzugeben, als der eine oder der andere Fall eintreten wird. Betrachten wir z. B. den Punkt B_1: es wird dieser Punkt entweder ein Inflexionspunkt oder ein innerer Punkt, jenachdem die Tangente c_1 den Bogen γ_1 schneidet oder nicht schneidet. Verbindet man nämlich im ersten Falle O mit einem B_1 naheliegenden Punkte von β_1 mit einer Geraden, wird auch diese mit γ_1 einen und nur einen Punkt gemein haben, und sie wird β_1 nicht mehr schneiden können weil sie mit der Verlängerung von β_1 einen B_1 naheliegenden Punkt gemein hat. Mit σ kann die Gerade, weil sie durch O geht, jedenfalls höchstens einen Punkt gemein haben. Es ist aber aus dem Grunde unmöglich, dass sie einen Punkt mit σ gemein hat, weil sie eine paare Zahl von Punkten mit $\sigma + \beta_1 + \gamma_1$ gemein haben muss. Es liegen desshalb σ und β_1 auf verschiedenen Seiten von b_1 und also σ und die Verlängerung von β_1 über B_1 auch auf verschiedenen Seiten von b_1.

B_1 ist also auf der abgerundeten Curve ein Inflexionspunkt.

Hat aber b_1 keinen Punkt mit γ_1 gemein, dann muss eine durch O gehende und b_1 naheliegende Gerade aus den eben erwähnten Gründen gleichzeitig einen Punkt mit β_1 und mit σ gemein haben, so dass σ und β_1 auf derselben Seite von b_1 liegen, d. h. B_1 ist ein innerer Punkt eines Elementarbogens.

Die hier beschriebene Abrundung — von der wir im folgenden fortwährend Gebrauch zu machen haben — besteht also in der Ersetzung zweier in einem Winkelpunkte A zusammenstossende Bögen β_1 und γ_1 durch einen Bogen σ. Alle diese Bögen sind endlich, man hat nur dafür zu sorgen 1) dass die Gerade B_1C_1 mit β_1 und γ_1 keine weitere Punkte als B_1 und C_1 gemein hat, 2) dass der Schnittpunkt O der Tangenten in B_1 und C_1 auf derselben Seite von B_1C_1 liegt wie der Winkelpunkt A, 3) dass σ die Bögen β_1 und γ_1 bzw. in B_1 und C_1 berührt, keine weitere Punkte mit β_1 und γ_1 gemein hat, und endlich den Winkelpunkt nicht in seinem Inneren enthält.

Es sei nun P ein von A verschiedener Punkt und PA eine uneigentliche Tangente in A. Man kann dann B_1 und C_1 so nahe an A wählen, dass P nicht in dem durch b_1 und c_1 begrenzten den Bogen σ enthaltenden Winkelraume liegt. Es wird deshalb eine und nur eine der Geraden PB_1 und PC_1 den Bogen σ ausserhalb B_1 und C_1 schneiden, d. h. es geht durch P eine und nur eine Tangente an σ. Wenn also PA eine uneigentliche Tangente der ursprünglichen Kurve ist, kann man immer die Abrundung so vornehmen, dass eine PA naheliegende Gerade eine eigentliche Tangente der abgerundeten Kurve wird. Sind ferner α und β zwei Bögen, von welchen der eine in A, der andere in B einen Winkelpunkt hat, und ist die Gerade AB sowohl in A wie in B eine uneigentliche Tangente, sieht man in ähnlicher Weise, dass man die Abrundung so vornehnen kann, dass eine AB naheliegende Gerade eine gemeinsame Tangente der abgerundeten Bögen α und β wird.

In Übereinstimmung mit dem oben gesagten sind drei. Arten von Winkelpunkten in Betracht zu ziehen:

1) Es kann sowohl b_1 wie c_1 den Bogen $\beta_1 + \gamma_1$ schneiden, und man erhält durch Abrundung zwei Inflexionspunkte. Ich nenne den Punkt einen Winkelpunkt erster Art.

2) Nur die eine der Tangenten b_1 und c_1 schneidet $\beta_1 + \gamma_1$. Durch Abrundung erhält man einen Inflexionspunkt, und es heisse der Punkt ein Winkelpunkt zweiter Art.

3) Keine der Tangenten b_1 und c_1 schneidet $\beta_1 + \gamma_1$. Durch Abrundung dieses Winkelpunktes dritter Art erhält man nur innere Punkte von Elementarbögen.

Ich bemerke noch, dass man auch eine Spitze wie einen Winkelpunkt abrunden kann. Durch Abrundung resp. einer Dornspitze oder einer Schnabelspitze, erhält man zwei oder einen Inflexionspunkt.

Es folgt dies ohne weiteres aus den obigen Sätzen.

---

§ 3.

Die Elementarkurve.

Die hier in Betracht kommenden in einer projectiven Ebene liegenden Kurven bilden erstens eine Punktmenge, die sich eindeutig und stetig so auf eine vollständige Gerade abbilden lassen, dass jedem Punkte der Geraden ein und nur ein Punkt der Kurve entspricht. Unsere Kurven sind also geschlossen, und er ist schon dieser Definition zufolge erlaubt davon zu sprechen, dass ein Punkt die Kurve, oder auch einen Teil der Kurve, in einem bestimmten Sinne durchläuft. Um aber Sätze von der im folgenden gegebenen Art ableiten zu können ist diese Gattung von projectivischen Jordankurven nach drei weit. Eine mehr begrenzte Gattung erhält man schon, wenn man (von eventuellen Ausnahmepunkten in endlicher Zahl abgesehen) in jedem Punkte M eine bestimmte Tangente m voraussetzt, wo m als die Grenzlage der Gerade MM_1, indem M_1 nach M konvergiert, definiert wird. Diese „einfache Kurven“ kann man noch weiter durch die Forderung spezialisieren, dass (von Ausnahmepunkten in endlicher Zahl abgesehen) die Tangente m mit dem Berührungspunkte M sich stetig ändert. Für diese Kurven, die ich der Kürze wegen „völlig stetige Kurven“ nenne, gelten noch teilweise mehrere der im folgenden zu nennenden Sätze. Der Hauptgegenstand unserer Betrachtungen werden aber die Elementarkurven sein. Diese werden durch die Forderung charakterisirt, dass sich auf beiden Seiten einen beliebigen Kurvenpunktes ein endliches Kurvenstück abgrenzen lässt, dass in M anfängt und ein Elementarbogen ist.

Man hat nun:

(1) Jede Elementarcurve lässt sich aus einer endlichen Zahl von Elementarbögen zusammensetzen[1].

Von einem bestimmten Punkte A der Kurve aus kann man nämlich in einem bestimmten Sinne einen endlichen Elementarbogen AM_1 absetzen; von M_1 in demselben Sinne einen ebensolchen M_1M_2 u. s. w. Entweder sind nun in dieser Weise alle Punkte der Kurve mittels einer endlichen Zahl von Elementarbögen erreichbar — denn ist ein Punkt B so erreichbar, dann ist auch jeder Punkt des Bogens AB erreichbar — oder auch konvergieren die Punkte M_1M_2 . . gegen einen Punkt Q, der nicht in der genannten Weise erreichbar ist; jeder Punkt des Bogens AQ ist aber erreichbar. Dies streitet aber gegen die Definition, infolge deren man immer einen Punkt R des Bogens AQ so bestimmen kann, dass RQ ein Elementarbogen ist.

Alle innere Punkte eines Elementarbogens nennen wir gewöhnliche Punkte der Kurve. Alle nicht gewöhnliche oder singuläre Punkte sind also nach § 2 entweder Spitzen oder Inflexionspunkte. Doch wollen wir auch die wie gewöhnlich definierten Doppelpunkte den singularen Punkten zurechnen. — Aus (1) folgt nun:

(2) Eine Elementarkurve kann zwar beliebig viele Spitzen und Inflexionspunkte haben, aber die Zahl dieser Punkte muss immer endlich sein.

Die Zahl der Doppelpunkte kann aber unendlich sein.

Aus (1) folgt weiter:

(3) Eine Elementarkurve kann eine beliebig grosse aber immer nur eine endliche Zahl von Punkten mit einer Geraden gemein haben.

Die grösste Zahl der Punkte, die eine Gerade mit der Kurve gemein haben kann, nennen wir die Realitätsordnung, oder kürzer die Ordnung der Kurve. Dabei setzen wir voraus, das ein Berührungspunkt, der ein gewöhnlicher Kurvenpunkt ist, zweimal als Schnittpunkt mit der Tangente mitzurechnen ist, aber dreimal, wenn der Berührungspunkt ein Inflexionspunkt oder eine Dornspitze ist, und viermals, wenn er eine Schnabelspitze ist. Der Grund dieser Verabredungen ist der, dass man in den genannten Fällen noch § 2 immer eine der Tangente naheliegende Gerade finden kann, welche in der genannten Zahl von Punkten schneidet. Aus demselben Grunde rechnen wir auch, dass jede durch eine Spitze A gehende Gerade, welche dort keine Tangente ist, mit der Kurve zwei in A zusammenfallende Punkte gemein hat.

Das reciproke Gebilde einer Elementarkurve ist wieder eine Elementarkurve. Man hat demnach:

(4) An eine Elementarkurve kann aus einem Punkte beliebig viele, aber immer nur eine endliche Zahl von Tangenten ausgehen.

Die grösste Zahl der aus einem Punkte ausgehenden Tangenten nennen wir

[1] Siehe J. Hjelmslev, Om Grundlaget for Læren om simple Kurver, Nyt Tidsk. f. Math., 1907. S. 61.

die Realitätsklasse oder kürzer die Klasse der Kurve. Wie hier zusammenfallende Tangenten zu rechnen sind, folgt aus dem vorigen.

Wird eine Elementarkurve von einer Geraden paarmal — oder unpaarmal — geschnitten, dann wird sie von jeder Geraden paarmal — oder unpaarmal — geschnitten. (5)

Dreht man nämlich eine Gerade l um einen ihrer Punkte, der aber weder auf der Kurve noch auf einer Tangente zu einem singulären Kurvenpunkte liegt, können Schnittpunkte von l mit der Kurve nur dann verschwinden oder neu auftreten, wenn l entweder eine Tangente der Kurve oder eine Spitze derselben überschreitet. Bei jedem solchen Übergange wird aber die Zahl der Schnittpunkte um $+2$ oder -2 geändert. Mittels der genannten Drehung kann man jede Gerade in jede andere allgemeiner Lage überführen. Besonders sind nur die Tangenten und die durch eine Spitze gehenden Geraden zu betrachten. Hier sieht man aber leicht, dass die oben in § 2 gemachten Verabredungen den Satz allgemein gültig machen (auch wenn die Kurve Winkelpunkte in endlicher Zahl enthält).

Die Zahl der Wendetangenten einer Elementarkurve ist paar oder unpaar je nachdem die Ordnung der Kurve paar oder unpaar ist. In diesem Satze rechnen wir die Tangente in einer Schnabelspitze den Wendetangenten zu. (6)

Es durchlaufe ein Punkt P eine vollständige Gerade l von einer Anfangsstellung P_0 aus; wir wählen die Gerade so, dass sie durch keinen Berührungspunkt einer Wendetangente geht. Die Zahl der aus P gehenden Tangenten der Kurve kann sich nur ändern, wenn entweder die Curve oder auch eine Wendetangente von P überschritten wird und dann jedesmal um 2. Weil aber, wenn P wieder in P_0 angelangt ist, die Zahl der Tangenten die ursprüngliche wird, muss die Zahl der Punkte, in welchen l von der Kurve und von den Wendetangenten geschnitten wird, immer paar sein, woraus der Satz folgt.

Dualistisch hat man:

Die Zahl der Spitzen einer Kurve ist paar oder unpaar je nachdem die Klasse der Kurve paar oder unpaar ist. (7)

Zwei Elementarkurven können beliebig viele, auch unendlich viele Punkte mit einander gemein haben. Man hat aber den v. Staudt'schen Satz:

Haben zwei Elementarkurven, von denen wenigstens die eine paarer Ordnung ist, eine unpaare Zahl von Punkten mit einander gemein, dann müssen sie wenigstens noch einen Punkt mit einander gemein haben. (8)

Man beweist diesen Satz wie den vorigen. Es seien die Kurven α und β, α paarer Ordnung. Es gehe durch einen fest gewählten Punkt P_0 auf β t Tangenten an α. Man lässt nun einen Punkt P die ganze Kurve β durchlaufen, und benutzt, dass die Zahl der durch P_0 gehenden Tangenten am Ende wieder t sein muss. Die Kurve α hat nun eine endliche Zahl s von Wendetangenten (im obigen Sinne), und es mögen beim Überschreiten dieser Geraden s_1 Mal zwei Tangenten an a gewonnen, und s_2 Mal zwei Tangenten verloren werden. Ebenso möge beim Überschreiten der Curven a q_1 Mal zwei Tangenten an a gewonnen und q_2 Mal zwei Tangenten verloren werden. Man hat dann:

$$2s_1 - 2s_2 + 2q_1 - 2q_2 = 0$$

$$\text{oder } s_1 - s_2 = q_2 - q_1 .$$

Weil nun nach (6) $s_1 + s_2$ eine paare Zahl ist, ist diese Gleichung unmöglich, wenn $q_1 + q_2$ unpaar ist.

Ganz ebenso beweist man:

(9) Wenn zwei Elementarkurven unpaarer Ordnung eine paare Zahl von Punkten mit einander gemein haben, dann müssen sie wenigstens noch einen Punkt mit einander gemein haben.

Beim Beweise ist vorausgesetzt, dass die Kurven einander nicht berühren und dass ein singulärer Punkt kein gemeinsamer Punkt ist. Es ist leicht die früher gemachten Verabredungen so zu erweitern dass der Satz auch in diesem Falle gilt; ich unterlasse dies, indem ich den Satz im folgenden so spärlich wie möglich benutzen werde[1].

(10) Wenn eine völlig stetige Kurve von jeder Tangente ausser in dem Berührungspunkte und von jeder durch eine Spitze gehenden Geraden ausser in diesem höchstens in n Punkten geschnitten wird, dann ist die Ordnung der Kurve höchstens $n+2$.

Wenn nämlich eine Gerade ihre Lage in der Ebene stetig ändert z. B. durch einen festen Punkt gehend, dann kann eine Änderung in der Zahl der Schnittpunkte mit der gegebenen Kurve nur dann eintreten, wenn die Gerade die Kurve berührt, oder auch wenn sie durch eine Spitze geht. Er gilt der Satz selbstverständlich auch, wenn die Kurve Winkelpunkte hat; man braucht dann nur auch die durch einem Winkelpunkte gehenden uneigentlichen Tangenten mitzunehmen.

Ebenso sieht man ferner, dass die Zahl der Punkte, die eine der im obigen Satze hervorgehobenen Geraden mit der Kurve gemein hat, nur dann sich ändern kann, wenn sie nochmal berührt oder nochmal durch eine Spitze (oder einen Winkelpunkt als uneigentliche Tangente) geht[2].

Wir wollen noch auf die in § 2 besprochene Abrundung Bezug nehmen und beweisen:

[1] Merkwürdigerweise sind die v. Staudt'schen Schnittpunktssätze ihrer Tragweite nach — soweit mir bekannt — noch gar nicht untersucht worden. Die obige Formulierung ist ganz speciell; übrigens sieht man leicht, dass man in dem gegebenen Beweise die eine der Kurven durch eine geschlossene projektive Jordankurve endlicher Ordnung ersetzen kann, aber auch dies ist von der allgemeinsten Form des Satzes weit entfernt. Ich bemerke noch, dass man aus einem solchen Satze leicht herleiten könnte, dass eine beliebige geschlossene projective Jordankurve paarer Ordnung ohne Doppelpunkte die projektive Ebene in zwei Gebiete trennt, was aber die Kurve unpaarer Ordnen nicht thut. (Siehe: Indledning i Læren om de grafiske Kurver, K. D. Vidensk. Selsk. Skr. 1899, S. 28.

[2] Wenn also eine in der Ebene beliebig gezeichnete Kurve (Elementarkurve) vorliegt, kann man immer die Ordnung der Kurve mittels einer endlichen Zahl von Proben bestimmen.

D u r c h e i n e A b r u n d u n g k a n n d i e O r d n u n g d e r K u r v e n i e m a l s e r e r h ö h t w e r d e n. (11)

Durch eine Abrundung werden zwei Bögen $AB = \beta$ und $AC = \gamma$ durch einen Elementarbogen σ ersetzt. Es kommt also darauf an zu zeigen, dass jede Gerade l, welche einen oder auch zwei Punkte mit σ gemein hat, bzw. wenigstens einen oder auch zwei Punkte mit $\beta + \gamma$ gemein haben muss. Wenn aber l einen und nur einen Punkt mit σ gemein hat, dann hat sie einen Punkt mit der endlichen Strecke $\overline{BC}$ gemein und also auch einen mit dem einem oder dem anderen der Strecken AB und AC. Die Gerade hat also entweder mit β oder mit γ einen Punkt gemein, mit dem anderen 0 oder 2 Punkte.

Wenn aber l den Bogen σ in zwei Punkten schneidet, dann geht sie durch einen inneren Punkt des durch α, β und σ begrenzten Gebietes und schneidet jede der endlichen Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$, weil sie jedenfalls die Strecke $\overline{BC}$ nicht schneidet. Die Gerade l muss also in diesem Falle jeden der Bögen β und γ in einem Punkte schneiden.

Dagegen kann man im Allgemeinen nicht behaupten, dass die Ordnung einer Kurve durch Abrundung nicht vermindert werden kann[1].

Hat eine völlig stetige geschlossene Kurve einen Doppelpunkt, kann man von diesem Punkte aus die Kurve in zwei P s e u d o z w e i g e teilen. Unter einen von einem Doppelpunkte O ausgehenden Pseudozweig werden wir den Teil der Kurve verstehen, den ein Punkt durchläuft, wenn dieser in O anfängt und stetig läuft, bis er das erste Mal wieder in O zurückkehrt. Der übrigbleibende Teil der Kurve ist dann auch ein Pseudozweig; solche zwei Pseudozweige, die zusammen die ganze Kurve ausmachen, nennen wir k o m p l e m e n t ä r e.

Wir wollen nun annehmen, dass die Tangenten in O getrennt sind, und dass O auf keinem der durch O gehenden Kurvenbögen BOB' und COC' ein Inflexionspunkt ist; B und C mögen demselben Pseudozweig angehören. Ist nun auf diesem Pseudozweige O ein Winkelpunkt erster Art, dann bedeutet dies den Ausführungen in § 2 zufolge, dass B und C so nahe an O gewählt werden können, dass die Tangente in B den Bogen OC und die Tangente in C den Bogen OB je in einem Punkte schneidet. Weil aber BOB' und COC' Elementarbögen sind, kann man B' und C' so nahe an O wählen, dass auch die Tangente in B' den Bogen OC und also nicht den Bogen OC', und ebenso die Tangente in C' nicht den Bogen OB' schneidet. Es wird desshalb den Definitionen in § 2 zufolge O auf dem komplementären Pseudozweig ein Winkelpunkt dritter Art sein.

Ganz in derselben Weise sieht man, dass O gleichzeitig auf beiden komplementären Zweigen ein Winkelpunkt zweiter Art sein wird, ɔ:

E i n D o p p e l p u n k t O m i t g e t r e n n t e n T a n g e n t e n v o n d e n e n k e i n e e i n e W e n d e t a n g e n t e i s t, w i r d e n t w e d e r a u f d e m e i n e n v o n O a u s g e h e n d e n P s e u d o z w e i g e i n W i n k e l p u n k t e r s t e r A r t, u n d z u g l e i c h a u f (12)

[1] Bei den im folgenden vorkommenden Beispielen von Abrundungen ist es jedoch errichtlich, dass die Ordnung der Kurve durch die Abrundung auch nicht vermindert wird.

dem komplementären ein Winkelpunkt dritter Art sein, oder auch wird er auf beiden Zweigen zugleich ein Winkelpunkt zweiter Art sein.

Wir wollen noch den Fall in Betracht ziehen, dass O auf dem Bogen BOB' aber nicht auf COC' ein Inflexionspunkt ist (Fig. 8 u. 9). Denken wir uns, dass BOC ein Winkelpunkt zweiter Art ist; dies bedeutet, dass entweder die Tangente in B den Bogen OC oder auch die Tangente in C den Bogen OB schneidet. Im ersten Fall wird die Tangente in B' nicht den Bogen OC und also OC' schneiden, und zugleich die Tangente in C' den Bogen OB nicht schneiden, aber den Bogen OB'. Der „komplementäre Winkelpunkt" $B'OC'$ ist also erster Art. In ganz ähnlicher Weise sieht man, das im zweiten Falle der komplementäre Winkelpunkt dritter Art wird. Man hat also:

(13) Schneiden sich zwei Bögen in einem Punkt O, der auf einem (aber nur auf einem) der Bögen ein Inflexionspunkt ist, dann sind von zwei komplementären Winkelpunkten der eine immer zweiter Art, während der andere erster oder dritter Art sein kann.

Erinnern wir uns, dass durch eine Abrundung zwei, ein oder keine Inflexionspunkte hervortreten je nachdem der Winkelpunkt erster, zweiter oder dritter Art ist, dann sieht man, dass Abrundung zweier komplementärer Winkelpunkte immer zwei neue Inflexionspunkte auftreten, wenn keine Tangente in O eine Wendetangente ist, dagegen ein oder drei, wenn der eine Tangente in O eine Wendetangente ist.

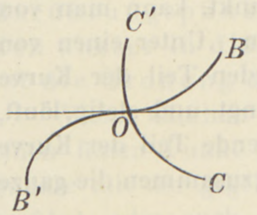

Fig. 8.

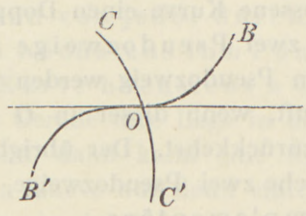

Fig. 9.

Wir wollen noch das Auftreten von neuen Inflexionspunkten untersuchen, sowohl wenn man die Winkelpunkte BOC und $B'OC'$, sowie auch wenn man die Winkelpunkte BOC' und $B'OC$ abrundet. Wir nennen dies die zwei komplementären Abrundungen der durch einen Doppelpunkt gehenden Bögen einer Elemencurve. Wenn O kein Inflexionspunkt ist, haben wir schon gesehen, dass beide Abrundungen zwei neue Inflexionspunkte geben.

Nehmen wir nun den Fall, dass die Gerade, welche BOB' in O berührt, eine Wendetangente ist. Dann wird einer der Winkelpunkte BOC oder $B'OC'$ sowie auch einer der Winkelpunkte BOC' oder $B'OC$ zweiter Art sein. Denken wir uns z. B., dass BOC zweiter Art ist, während $B'OC'$ erster Art ist. Dann ist den früheren Definitionen zufolge COB' ein Winkelpunkt zweiter Art und BOC' dritter Art. Daraus folgt, dass man, wenn man von der einen komplementären Abrundung zur anderen übergeht, dabei entweder zwei O naheliegende Inflexionspunkte gewinnen oder verlieren wird.

Späterer Anwendungen wegen, — die jedoch in der vorliegenden Arbeit nicht hervortreten, — bemerke ich noch folgendes:

Liegt ein Bogen α einer Elementarkurve einem anderen Bogen α_1 derart nahe, dass die Tangenten in nahe liegenden Punkten auch nahe an einander liegen, dann kann man sagen, dass die zwei Bögen völlig nahe an einander liegen. Einer Wendetangente von α wird dann auch eine Wendetangente von α_1 nahe liegen und umgekehrt.

Betrachten wir nun wie in Fig. 8 u. 9 zwei Bögen BOB' und COC', welche einander in O schneiden, und nehmen wir die zwei komplementären Abrundungen vor. Es entstehen dabei zwei Paare von völlig stetigen Bögen (von Elementarkurven) α und β durch die eine, α_1 und β_1 durch die andere Abrundung. Liegen nun den Bögen α, β, γ, δ vier andere ebensolche Bögen α_1, β_1, γ_1, δ_1 völlig nahe an, dann werden α_1 und β_1 zusammen zwei O nahe liegende Inflexionspunkte mehr oder weniger haben, als der Bögen γ_1 und δ_1 zusammen.

Wir wollen noch den altbekannten Satz nennen:

Eine völlig stetige geschlossene Kurve ohne Spitzen und Inflexionspunkte sowie ohne Doppelpunkte und Doppeltangenten ist eine Kurve zweiter Ordnung. (14)

Der einfachste von den von diesem Möbius'schen Satz gegebenen Beweisen rührt meine Wissens von J. Hjelmslev her![1] Aus dessen Beweis folgt aber, dass es unnöthig ist die Nichtexistens von Doppeltangenten ausdrücklich zu postulieren, so dass man hat:

Eine völlig stetige geschlossene Kurve ohne Spitzen, Inflexionspunkte und Doppelpunkte ist eine Kurve zweiter Ordnung. (15)

Man könnte versuchen auch andere Singularitäten in dem Aussage des Satzes auszulassen. Im Allgemeinen wird das freilich nicht möglich sein, wir werden aber einen spezielleren — uns später nützlichen — Satz aufstellen, der in dieser Richtung geht. Erst beweisen wir:

Eine völlig stetige geschlossene Kurve ohne Spitzen, Doppelpunkte und Doppeltangenten, aber mit s Inflexionspunkten ist aus s Elementarbögen zusammengesetzt. (16)

Die Bögen müssen in den Inflexionspunkten $W_1, W_2, W_3 \ldots$ zusammenstossen, welche Punkte in der genannte Ordnung auf der Kurve liegen mögen. Er sei α_1 derjenige Bogen $W_1 W_2$, der W_3 nicht enthält, α_2 der analog bestimmte Bogen $W_2 W_3$ u. s. w. Weil die Kurve keine Spitzen und keine Doppeltangenten hat, schneidet jede Tangente ausserhalb dem Berührungspunkte M die Kurve in gleichvielen Punkten $P_1, P_2, P_3 \ldots P_r$, und weil von diesen Punkten keine zwei zusammenfallen können, bleibt die Folge dieser Punkte unverändert, wenn M seine Lage auf der Kurve ändert; diese Folge sei in einem bestimmten Sinne die angegebene, wobei noch vorausgesetzt werde, dass in einem bestimmten Augenblick M zwischen P_1 und P_r liegt. Es sei M als ein beliebiger Punkt des Bogens $W_1 W_r = \alpha_r$ angenommen. Wenn nun P_1 auf dem Bogen MW_1 von α_r läge, dann müssten M und P_1 sich in demselben Sinne bewegen, weil sonst auf dem Bogen $P_1 M$ von α_r ein

[1] Siehe: Nyt Tidsskrift f. Math., 1907, S. 64.

neuer Inflexionspunkt auftreten würde[1]. Aber es ist auch nicht möglich, dass M und P_1 sich in demselben Sinne bewegen, denn in der unmittelbaren Nähe von W_1 ist dieses nicht der Fall. Ebenso kann die Tangente m in M auch nicht den Bogen MW_r von a_r schneiden. Weil also keine Tangente von a_r diesen Bogen schneiden kann, ist a_r ein Elementarbogen (siehe Seite 12). Dasselbe gilt den übrigen Bögen a.

(17) Wir können nun beweisen:

Eine völlig stetige und geschlossene Kurve ohne Doppelpunkte, Doppeltangenten und Spitzen kann nicht eine paare Zahl von Inflexionspunkten haben.

Es habe die Kurve s Inflexionspunkte $W_1, W_2 \ldots W_s$. Dem obigen zufolge ist die Kurve aus s Elementarbögen zusammengesetzt. Wir gebrauchen dieselben Bezeichnungen wie im Beweise des vorigen Satzes, so dass $M, P_1, P_2 \ldots P_r$ auf den Kurve eine Folge bilden. Wenn nun M sich auf a_r gegen W_1 in einem bestimmten Sinne bewegt, dann muss — weil zwischen M und W_1 kein Inflexionspunkt liegt — auch P_1 sich in einem bestimmten Sinne bewegen, und dieser muss dem Sinne von M entgegengesetzt sein, weil das in der unmittelbaren Nähe an W_1 der Fall ist. Wenn M durch W_1 auf den Bogen a_1 übergeht, dann bleibt der Bewegungssinn von M unverändert, während der Sinn jedes Punktes P wechselt. Man sieht nun ganz wie oben, dass jetzt d. h. wenn M sich auf a_1 von W_1 nach W_2 bewegt, dann M und P_2 sich in entgegengesetzten Sinne bewegen müssen. Daraus folgt aber, dass beim ersten Teil der Bewegung, d. h. während M sich auf a_r von W_r nach W_1 bewegte, dann M und P_2 sich in entgegengesetzten Sinnen bewegen müssen. Die Fortsetzung der Schlüsse zeigt, dass $P_1, P_3, P_5 \ldots$ sich alle in entgegengesetzten Sinne von M, während $P_2, P_4, P_6 \ldots$ sich alle in demselben Sinne wie M bewegen müssen. Wenn also s paar ist, dann wird M und P_s sich in demselben Sinne bewegen. Das ist aber eben dem obigen zufolge unmöglich, denn M und P_s folgen ebensowohl auf einander wie M und P_1 (wenn man den positiven Sinn der Kurve mit dem entgegengesetzten umtauscht). Es kann also s nicht paar sein.

Hieraus folgt endlich:

(18) Eine geschlossene und völlig stetige Kurve paarer Ordnung ohne Doppeltangenten, Doppelpunkte und Spitzen kann nur eine Kurve zweiter Ordnung sein.

Eine paare Kurve kann nicht eine unpaare Zahl von Inflexionspunkten haben. Wenn man also im Voraus weiss, dass die Kurve paar ist, dann braucht man das Nichtvorhandensein von Inflexionspunkten in dem Möbius'schen Satze nicht ausdrücklich zu postulieren.

[1] Hier gebrauchen wir freilich den einfachen Korrespondenzsatz, den wir erst als (A) in § 4, Seite 23 formulieren.

§ 4.

Das elementare Korrespondenzprinzip.

Um die reelle Eksistenz gewisser Punkte fest zu stellen benutzen wir durchgehend den folgenden Satz:

A. Entspricht jedem Punkt X eines endlichen oder unendlichen Stückes *MN* einer Geraden ein und nur ein Punkt eines Stückes *PQ* derselben Geraden, und durchlaufen korrespondierende Punkte X und Y gleichzeitig stetig die Stücke *MN* und *PQ*, die Endpunkte mitgerechnet, in entgegengesetzten Richtungen, dann giebt es, wenn *MN* und *PQ* einander trennen, auf *MN* (und auf *PQ*) ein und nur ein Punkt, wo X und Y zusammenfallen.

Dieser Satz, die einfachste Form des „elementaren Korrespondenzsatzes, ist nichts anders als eine geometrische Formulierung eines Hauptsatzes über stetige Funktionen.

Weil *MN* und *PQ* einander trennen, kann man nämlich immer einen Punkt der Geraden finden, der weder auf *MN* noch auf *PQ* liegt. Man kann deshalb — jedenfalls nach Ausführung einer Kollineation — davon ausgehen, dass die Stücke *MN* und *PQ* beide endlich sind. Es seien nun x und y die Abscissen von X und Y, und es sei der positive Sinn so gewählt, dass x wächst, wenn X von M nach N geht. Es seien x_1, y_1, x_2, y_2 die Abscissen von bzw. M, P, N, Q. Man hat dann $x_1 < x_2$, $y_1 > y_2$, sowie auch $x_1 < y_1$, $x_2 > y_2$. Wir nehmen nun x, y als Koordinaten in einem rechtwinkligen System an; $(x; y)$ bewegt sich dann, wenn X von M nach N geht, auf einem stetigen Bogen von $(x_1; y_1)$ nach $(x_2; y_2)$. Diese zwei Punkte liegen aber auf verschiedenen Seiten der Geraden $y = x$, und der Bogen wird deshalb dieselbe in einem und — weil $y = f(x)$ eine abnehmende oder wenigstens nirgends wachsende Funktion ist — nur in einem Punkte schneiden.

Für uns im folgenden ist nun die nachstehende Erweiterung von (*A*) von wesentlicher Bedeutung.

B. Es seien auf einer im projectiven Sinne geschlossenen Curve, die sich ein-eindeutig auf einem Kreis abbilden lässt, Punkte X und Y so überall stetig von einander abhängig, dass jedem Punkte der Kurve als ein Punkt X — oder Y — aufgefasst p — oder q — getrennte Punkt Y — oder X — entsprechen; es bewege sich ferner überall ein Punkt X — oder Y — innerhalb eines endlichen wenn auch noch so kleinen Gebietes in einem bestimmten Sinne, wenn der entsprechende es thut. Setzt man nun noch voraus, dass in irgend einer Stellung ein Punkt X mit irgend einem seiner entsprechenden ungleichsinnig läuft, dann giebt es $p + q$ Punkte in welchen ein Punkt X mit einem entsprechenden Punkte Y zusammenfallen wird.

Wir wollen erstens zeigen, dass jeder Punkt Y, der einem in einem bestimmten Sinne laufenden Punkt X entspricht, in einem bestimmten Sinne laufen muss. Es ist dies eine Voraussetzung, wenn X sich innerhalb eines hinreichend kleinen Gebietes befindet. Aber auch, wenn X immer in demselben Sinne laufend aus diesem Gebiete heraustritt, kann keiner der entsprechenden Punkte Y z. B. Y_2 seinen Bewegungssinn ändern. Jedem Punkte Y entsprechen nämlich q und nur q Punkte X; wenn nun Y_2 in einem Punkt Z_2 den Sinn änderte, würde er in einen Punkt Z gelangen, den er früher innegehabt hatte, und es würde dann diesem Punkte, als ein Punkt Y aufgefasst, wenigstens $q+1$ Punkte X entsprechen, jedenfalls wenn Z hinreichend nahe an Z_2 gewählt wird.

Wir wissen ferner nach unseren Voraussetzungen, dass X_1 und einer der entsprechenden Punkte z. B. Y_1 in entgegengesetzten Sinne laufen. Daraus folgt aber, dass auch jeder der entsprechenden z. B. Y_2 in entgegengesetzten Sinne von X_1 laufen muss. Mann kann nämlich den Punkt Y_1 die ganze Kurve durchlaufen lassen, wodurch auch X_1 entweder einen Teil der Kurve oder auch die ganze Kurve einmal oder mehrmal durchläuft. Wenn nun während dieser Bewegung Y_1 und Y_2 sich in entgegengesetzten Sinne bewegt hätten, dann müssten Y_1 und Y_2 wenigstens einmal mit einander zusammenfallen, was gegen die Voraussetzungen streitet.

Die Bedingung, dass die Kurve sich ein-eindeutig auf einen Kreis abbilden lässt, ist jedenfalls erfüllt, wenn die Kurve eine Elementarkurve ist. Dasselbe gillt aber auch im weiteren Umfange, so besonders wenn die Kurve rektifizierbar ist, indem man dann offenbar die Kurve auf einen Kreis mit demselben Umfang wie diese abbilden kann. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn die Kurve — mit Ausnahme einzelner Punkte — überall völlig stetig ist. Freilich setzt man hier fürs erste voraus, dass die Kurve ganz im endlichen liegt. Stellt man aber noch die Forderung, dass die Kurve endlicher Ordnung sei, dann hat sie auch nur eine endliche Zahl von Bögen, welche ins unendliche gehen. Diese kann man durch Kollineationen in endliche Bögen transformieren und dann die Bogenlängen im Bilde ablesen[1].

Indem wir nun alle Punkte auf einem Kreise liegend annehmen, seien s_1 und s_2 die von einem bestimmten Nulpunkte A aus in einem bestimmten Sinne gemessenen Bögen AX und AY. Die kleinsten positiven Reste von s_1 und s_1 mit dem ganzen Kreisumfange p als Divisor, wählen wir als Koordinaten ξ und η in einem rechtwinkligen Koordinatsysteme. In Übereinstimmung mit der Abhängigkeit von s_1 und s_2, wird dann innerhalb einer Kvadrate mit den Seiten p Bögen läufen, deren jeder in einem Punkte des Umfange des Kvadrates seinen Anfang nimmt und auch da endet. Auf dem Umfange werden sich $p+q+p+q$ Endpunkte vorfinden, also wird die Zahl des Bögen $p+q$ sein. Jeder Bogen, der in einem Punkte von $\xi = o$ seinen Anfang nimmt, muss entweder in einem Punkte von $\eta = o$ oder auch in einem Punkte von $\xi = p$ endigen, und jeder Bogen, der in $\eta = p$ seinen Anfang nimmt, muss in $\eta = o$ oder $\xi = p$ endigen. Weil nun den Voraussetzungen zufolge

[1] Ich benutze im folgenden den Beweis, der von A. K. Erlung gegeben worden ist, siehe: Lidt om det grafiske Korrespondanceprincip, Nyt Tidsskr. f. Math., 1906, S. 58.

η mit wachsende ξ immer abnimmt, wird jeder Bogen von der Geraden $\xi = \eta$ in einem und nur einem Punkte geschnitten, und hiermit ist der Satz bewiesen.

Es ist aus dem Beweise ersichtlich, dass der Satz auch noch giltig ist, wenn einer der Punkte Y, die einem Punkte X entsprechen, entweder beständig oder auch nur für ein gewisses Intervall von X ein festliegender Punkt ist; es kommt nur darauf an, dass η mit wachsenden ξ niemals wächst.

Es ist noch zu bemerken, dass die Bedingung, dass die einem Punkt X entsprechenden Punkte Y nicht zusammenfallen dürfen, nur dazu benutzt wurde um aus der Ungleichläufigkeit des Punktes X und eines der ersprechenden Punkte Y die Ungleichläufigkeit von X and allen entsprechenden Y schliessen zu können. Wenn man also das letztere im Voraus weiss, dann behält der Satz noch seine Giltigkeit, auch wenn die einem und demselben X entsprechenden Punkte Y für bestimmte X zusammenfallen. Es kann in solchen Fällen auch geschehen, dass einer der gefundenen Punkten mit einer gewissen Multiplicität zu rechnen ist; für die Bestimmung derselben giebt der obige Beweis in jedem einzelnen Fall die nöthigen Anhaltspunkte. Die im Satze erstgenannte Forderung, nämlich dass Y (oder X) sich innerhalb eines endlichen Gebietes in einem bestimmten Sinne bewegen soll, wenn X (oder Y) es thut, ist nach § 1 erfüllt, wenn X einen Elementarbogen durchläuft und Y ein zu X gehöriger Tangentialpunkt ist, oder auch wenn X und Y Schnittpunkte eines Elementarbogens mit einer beweglichen Tangente eines zweiten Elementarbogens sind.

Wir wollen nun den Satz auf einige für uns im folgenden wichtige Beispiele anwenden.

Erstes Beispiel:

Es werde eine Elementarkurve β weder von einer anderen Elementarkurve α noch von deren Wendetangenten oder Doppeltangenten geschnitten, und es habe jede Tangente von α, die überhaupt β schneidet, n Punkte mit derselben gemein. Die zwei Kurven haben dann entweder keine oder auch $2k(n-1)$ Tangenten mit einander gemein, wenn aus irgend einem Punkte von β k Tangenten an α gehen.

Aus den Voraussetzungen folgt, dass aus jedem Punkte X der Kurve β k Tangenten an α gehen, und dass jede solche Tangente die Kurve β nochmals in $(n-1)$ Punkten Y schneidet. Man hat also ein $(k(n-1);\ k(n-1))$ Abhängigkeit in X und Y, und es können zwei Punkte Y, welche demselben Punkte X entsprechen, nicht zusammenfallen. Wenn aber t eine gemeinsame Tangente von α und β ist, welche β in B berührt, dann werden die t naheliegenden Tangenten von α, die überhaupt β schneiden, dieselbe in Punkten schneiden, von welchen diejenigen, welche nahe an B liegen in entgegengesetzten Sinne laufen. Wenn also wenigstens eine Tangente α und β gemein ist, dann werden die Kurven $2k(n-1)$ Tangenten mit einander gemein haben.

Insbesondere haben zwei Kurven zweiter Ordnung, welche keinen Punkt mit einander gemein haben, entweder keine oder auch vier Tangenten mit einander gemein[1].

Zweites Beispiel:

Hat eine völlig stetige Kurve n-ter Ordnung einen $(n-2)$-fachen Punkt O, dann gehen aus diesem Punkte entweder keine oder auch zwei Tangenten, welche ausserhalb O berühren.

Es ist dieser Satz eine unmittelbare Folge des Korrespondenzsatzes. Ich bemerke nur, dass man um den Satz auch in dem Falle aufrechthalten zu können, wo O ein Inflexionspunkt ist, die zugehörige Wendetangente als eine in einem Nachbarpunkte zu O, aber nicht in O berührende Tangente auffassen soll. Ferner sei bemerkt, dass in diesem Satze jede durch eine Spitze gehende Gerade als eine Tangente betrachtet werden soll. Man erhält so beiläufig den Satz:

Eine völlig stetige Kurve n-ter Ordnung mit einem $(n-2)$-fachen Punkte kann höchstens zwei Spitzen haben.

Drittes Beispiel:

Es habe eine völlig stetige Kurve n-ter Ordnung ohne Spitzen einen $(n-2)$-fachen Punkt A, durch den zwei Tangenten gehen, die auserhalb A berühren, und einen einfachen Doppelpunkt B, durch den keine auserhalb B berührende Tangente geht; die Kurve wird dann noch $n-3$ einfache Doppelpunkte haben.

Jede durch B gehende Gerade schneidet nämlich die Kurve in gleich vielen und also in $n-2$ Punkten (wobei ein Nachbarpunkt von A als von A verschieden betrachtet wird); alle diese Punkte müssen in demselben Sinne laufen, weil sie nicht zusammenfallen können. Sind nun zwei Kurvenpunkte X und Y so verbunden, dass die Geraden AX und BY sich in einem Kurvenpunkte Z schneiden, bilden die Paare (X, Y) eine $(n-3,\ n-3)$ Korrespondenz, auf welche man das Prinzip anwenden kann. X und Y können nur in einem neuen Doppelpunkte zusammenfallen, aber fallen in jedem von diesen zweimal zusammen; die Kurve hat also $n-3$ neue Doppelpunkte.

Denkt man sich die Kurve algebraisch, muss sie also unter den gegebenen Bedingungen unikursal sein[2].

§ 5.

Die Kurve dritter Ordnung.

Wir betrachten eine geschlossene völlig stetige Kurve dritter Ordnung, die also von jeder Geraden entweder in einem oder in drei getrennten oder in vorher

[1] Haben die zwei Kurven zweiter Ordnung p Punkten mit einander gemein, wo p von 0 oder 4 verschieden ist, dann wird die Zahl der gemeinsamen Tangenten auch p sein (siehe: Indledning i Læren om grafiske Kurver, Kgl. danske Vidensk. Selsk. Skr., 6. R. X. 1899, S. 19).

[2] Für algebraische Kurven habe ich den Satz als Aufgabe gestellt in „Archiv f. Math. und Physik“, Aufg. Nr. 176.

besprochener Weise zusammenfallenden Punkten geschnitten wird. Findet sich eine Gerade, die mehr als drei Punkte mit der Kurve gemein hat, soll jeder Punkt der Geraden der Kurve angehören, und die übrigen Punkte derselben müssen dann eine Kurve zweiter Ordnung bilden. Bis weiter setzen wir voraus, dass die Kurve keinen Doppelpunkt hat.

Die Zahl der Tangenten, die aus einem Punkte P der Kurven ausgehen und ausserhalb P berühren, kann sich nicht ändern, wenn P seine Lage auf der Kurve ändert, weil die Kurve weder sich selbst noch eine seiner Wendetangenten schneidet. Ist nun P ein beliebiger Punkt der Kurve, folgt schon aus dem Korrespondenzsatz — siehe zweites Beispiel S. 26, dass aus P entweder 0 oder 2 Tangenten gehen, die ausserhalb P berühren. Hier wird es aber sicher zwei Tangenten geben, weil man P als den Tangentialpunkt irgend eines Kurvenpunktes wählen kann, d. h.:

Aus jedem Punkte der Kurve dritter Ordnung ohne Doppelpunkte oder Spitzen gehen immer zwei Tangenten, die ausserhalb P berühren. (1)

Die Kurve hat wenigstens einen Inflexionspunkt; es folgt dies schon daraus, dass eine überall völlig stetige Kurve ohne Doppelpunkte, Spitzen und Inflexionspunkte eine ebensolche Kurve zweiter Ordnung sein muss. Um die Zahl der Inflexionspunkte zu bestimmen braucht man nur die (2—1) Korrespondenz zu betrachten, die einen Punkt R der Kurve mit seinem Tangentialpunkt P verbindet. Es können hier die zwei Punkte R, welche einem Punkte P entsprechen, nicht zusammenfallen; man braucht also nur an irgend einer Stelle den Lauf von R und P zu untersuchen. Man weiss aber nach § 2, Seite 10 dass P und R in der Nähe eines Inflexionspunktes in entgegengesetztem Sinne laufen. Man hat also:

Eine Elementarkurve dritter Ordnung ohne Doppelpunkte oder Spitzen hat immer drei Inflexionspunkte. (2)

Um die Formen der Kurve etwas näher charachterisieren zu können, stellen wir den folgenden einfachen Satz auf (der elementare Carnot'sche Satz):

Das zusammenhängende Produkt der Verhältnisse, in denen die Seiten eines Polygons durch die Schnittpunkte mit einer beliebigen geschlossenen Elementarcurve geteilt werden, ist immer positiv. (3)

Es genügt ein Dreieck ABC zu betrachten. Wir wählen dieses so, dass keine Winkelspitze auf der Kurve liegt, und so klein, dass sämtliche Schnittpunkte mit der Kurve auf den Verlängerungen der Seiten liegen; es ist in dieser Lage der Satz selbstverständlich. Drehen wir nun eine Dreiecksseite z. B. AB um A, wird ein Verhältniss auf AB nur dann sein Vorzeichen ändern können, wenn die veränderliche Dreiecksseite durch einen Schnittpunkt der Kurve mit der gegenüberliegenden Seite BC hindurchgeht. Es wird dann aber auch ein Verhältniss auf eben dieser Seite sein Vorzeichen ändern, so dass das Produkt der Verhältnisse wieder positiv wird. Hiermit ist der Satz offenbar bewiesen; die speziellen Fälle, wo entweder eine Seite die Kurve berührt oder wo eine Winkelspitze auf der Kurve liegt, erledigen sich ganz ebenso wie bei den algebraischen Kurven.

Aus diesem Satze folgt, dass die Kurve dritter Ordnung immer so projiciert werden kann, dass die drei Inflexionspunkte alle auf den Verlängerungen der Seiten der Wendepunktsdreiecks liegen. Ein Bogen der Kurve, der durch zwei der Inflexionspunkte begrenzt ist und nicht den dritten enthält, ist ein Elementarbogen (siehe § 3, Satz 16, Seite 16).

Wir können also sagen:

(4) Eine völlig stetige Kurve dritter Ordnung ist aus drei Elementarbögen zusammengesetzt und liegt in drei von den vier Dreiecken, in welche die Ebene durch die drei Wendetangenten geteilt wird.

Hierbei ist freilich verausgesetzt, dass die drei Wendetangenten nicht durch demselben Punkte gehen; diesen leicht zu behandelden Spezialfall lasse ich hier liegen.

Nachdem durch den vorigen Satz das Aussehen der Kurve wesentlich karakterisirt ist, wende ich mich zur Bestimmung der Klasse der Kurve. Aus einem Punkte P der Kurve gehen zwei Tangenten, die ausserhalb P berühren; aus einem in der Nähe der Kurve liegenden Punkte gehen also entweder zwei oder auch vier Tangenten. Die grösst mögliche Zahl von Tangenten ist aber 6, weil die Kurve aus drei Elementarbögen zusammengesetzt ist; dass die Zahl 6 erreichbar ist, weiss man schon aus der Teori der algebraischen Kurven.

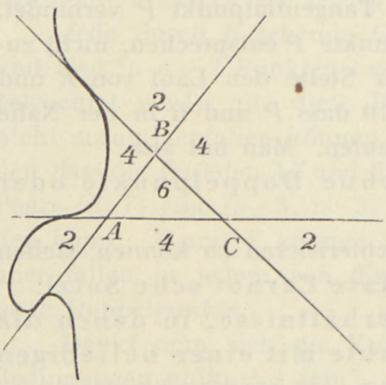

Fig. 10.

Weiter kann man gelangen, wenn man den Begriff einer vollständigen Kurve dritter Ordnung einführt Eine ein- oder mehrteilige Kurve dritter Ordnung heissen wir aber vollständig, wenn man der Kurve nicht noch andere Zweige hinzufügen kann ohne die Ordnung zu erhöhen. Eine Kurve dritter Ordnung kann nun offenbar höchstens zweiteilig sein, und von seinen eventuellen Zweigen muss der eine dritter, der andere zweiter Ordnung sein; aber man kann nicht jedem geschlossenen Zweige dritter Ordnung ein projektives Oval hinzufügen ohne die Ordnung zu erhöhen.

Um dies näher zu untersuchen denken wir uns die einteilige Kurve so projiciert, dass sie nicht in das endlichen Wendepunktsdreieck ABC hineinricht. Es möge einem (von Wendetangenten und Kurvenbögen begrenzten) Gebiete, aus dessen Punkten r Tangenten ausgehen, der Index r zugeschrieben werden. Eine Winkelspitze z. B. A wird dann, wie leicht zu sehen, von vier Gebieten umgeben, dessen Indices in der Ordnung, in der sie auf einander folgen, entweder 0, 2, 4, 2 oder auch 2, 4, 6, 4 sein müssen. Da man einer Wendetangente entlang von einer Winkelspitze ohne die Kurve zu überschreiben zu jeder anderen Winkelspitze gelangen kann, wird die Indicesbezeichnung bei allen Winkelspitzen dieselbe sein. Da aber die Kurve die Gebiete mit dem Index 2 von denjenigen mit dem Index 4 trennen muss, wird dass endliche Dreiecksgebiet entweder den Index 0 oder den Index 6 haben. Ein Oval, das man dem Zweige dritter Ordnung hinzufügen kann, kann nur in einem Gebiete liegen, dessen Index 0 ist, denn eine durch einen inneren Punkt des Ovales gehende Tangente, würde sonst 5 Punkte mit der Kurve gemein haben. Aber umgekehrt kann man auch immer in ein Gebiet, dessen Index 0 ist, ein Oval hineinlegen ohne die Ordnung der Gesammtkurven zu erhöhen. Ist nämlich P ein Punkt durch den keine Tangente geht, dann wird jede durch P gehende Gerade die Kurve in gleichvielen Punkten schneiden; diese Zahl muss aber 1 sein, was man am besten sieht, wenn man P mit einer Winkelspitze des Dreiecks verbindet. Man sieht also, dass der Fall, wo die Klasse der Kurve vier ist, eben derselbe ist, wo man dem Kurvenzweig dritter Ordnung ein Oval hinzufügen kann, ohne die Ordnung der Gesammtkurve zu erhöhen. Da ein projektives Oval zweiter Klasse ist, hat man also:

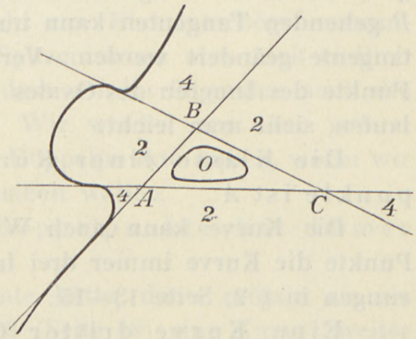

Fig. 11.

Die Klasse einer vollständigen ein- oder zweiteiligen Kurve dritter Ordnung ist immer 6. (5)

Ein geschlossener Kurvenzweig dritter Ordnung, dessen Wendetangenten durch denselben Punkt gehen, ist vollständig. (Aus O gehen nach unseren früheren Verabredungen 6 Tangenten).

Wir gehen jetzt zur Betrachtung der Kurven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte O über. Von O aus kann man die Kurve in zwei Pseudozweige zerlegen; die eine von diesen β^3 muss dritter Ordnung, die andere α^2 zweiter Ordnung sein; die letztere nennen wir die Schleife der Kurve. Jeder von den Zweigen hat in O einen Winkelpunkt; eine Kurve zweiter Ordnung kann aber nur einen Winkelpunkt dritter Art haben; auf β^3 muss desshalb O ein Winkelpunkt erster Art sein (siehe § 3 (12), Seite 19). Wenn wir nun diesen Punkt in der in § 2 beschriebenen Weise abrunden, treten in O zwei Inflexionspunkte auf, und der abgerundete Zweig β^3 kann ausser diesen nur einen Inflexionspunkt haben. Bei Aufhebung der Abrundung bleibt also ein Inflexionspunkt übrig.

Weil auf α^2 kein solcher liegen kann, hat man also:

Eine Kurve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte hat einen und nur einen Inflexionspunkt. (6)

Eine Kurve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte ist vollständig im früheren Sinne, weil jede Gerade, die durch einen Punkt im Inneren der Schleife geht, die Kurve $\alpha^2 + \beta^3$ in drei Punkten schneiden muss. Ebenso sieht man, dass aus einem Punkte M der Schleife keine Tangente gehen kann, die ausserhalb M berührt. Aus einem Punkte M_1 des Pseudozweiges β^3 gehen aber zwei Tangenten, die ausserhalb M_1 berühren; man sieht dies genau ebenso wie den entsprechenden Satz bei den Kurven ohne Doppelpunkt. Von den Berührungspunkten muss der eine auf der Schleife liegen, während der andere auf β^3 liegen muss; $M_1 O$ ist nämlich eine uneigentliche Tangente der Schleife.

Aus einem Punkte in der Nähe von β_3 — aber nicht in der Nähe von O — gehen 2 oder 4 Tangenten der Kurve. Die Zahl der durch einen beliebigen Punkt P gehenden Tangenten kann nur durch Überschreiten der Kurve oder der Wendetangente geändert werden. Verbindet man nun P durch eine Gerade mit einem Punkte des Inneren des Ovales und lässt man einen Punkt die ganze Gerade durchlaufen, sieht man leicht:

(7) Die Klasse einer Kurve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte ist A.

Die Kurve kann auch Winkelpunkte haben. Weil nach Abrundung dieser Punkte die Kurve immer drei Inflexionspunkte haben wird, folgt aus den Erörterungen in § 2, Seite 13—15:

(8) Eine Kurve dritter Ordnung kann höchstens einen Winkelpunkt erster Art und höchstens drei Winkelpunkte zweiter Art haben.

Dagegen ist eine beliebige Zahl von Winkelpunkten dritter Art möglich. Die Kurve kann auch einen Winkelpunkt erster Art und zugleich einen zweiter Art haben.

In derselben Weise sieht man noch:

(9) Eine Kurve dritter Ordnung mit einem Winkelpunkte hat 1, 2 oder 3 Inflexionspunkte, jenachdem der Winkelpunkt erster, zweiter oder dritter Art ist.

Aus den Sätzen über die verschiedenen Arten von Winkelpunkten folgt endlich:

(10) Von den Tangenten in einem Winkelpunkte O einer Kurve dritter Ordnung werden entweder beide, nur die eine oder auch keine die Kurve ausserhalb O schneiden, jenachdem der Punkt dritter, zweiter oder auch erster Art ist.

---

§ 6.

Die Kurve vierter Ordnung ohne Doppelpunkte.

Wir werden uns an dieser Stelle an der einteiligen Kurven vierter Ordnung halten. Man kann freilich auch mehrere Sätze über mehrteilige Kurven aufstellen aber wir begnügen uns hier mit der Bemerkung, dass die Zahl der getrennten Zweige beliebig — auch unendlich — gross sein kann. Man braucht nur zwei Kurven zweiter Ordnung α und β zu nehmen, die eine beliebige Zahl von Punkten mit einander gemein haben; mittels einer leicht verständlichen Abrundung einer durch einen Bogen von α und einen Bogen von β gebildeten Kurve erhält man offenbar (durch genügend oft wiederholte Abrundungen) eine Kurve vierter Ordnung, die aus beliebig vielen Zweigen zusammengesetzt ist.

Den einzelnen Zweig, den wir betrachten, denken wir uns ferner als eine Elementarkurve d. h. als aus einer endlichen Zahl von Elementarbögen zusammengesetzt. Die Zahl der Inflexionspunkte und Spitzen muss also auch endlich sein. Dagegen ist es eine neue Voraussetzung, dass wir im folgenden auch die Zahl der Doppelpunkte als endlich voraussetzen. Wir werden uns aber vorerst nur mit denjenigen Kurven beschäftigen, die keine Doppelpunkte haben, wobei wir zugleich die Kurven mit Spitzen ausgeschlossen haben wollen.

Eine Kurve vierter Ordnung ohne Doppelpunkte hat immer wenigstens eine Doppeltangente. (1)

Wenn die Kurve nämlich keine Doppeltangente hätte, dann müsste sie als eine paare Elementarkurve infolge Satz (17) in § 3 (Seite 18) eine Kurve zweiter Ordnung sein.

In der Nähe einer Doppeltangente liegen immer Gerade, welche keine Punkte mit der Kurve gemein haben. Man sieht hierdurch:

Man kann immer durch eine Centralprojection erreichen, dass eine Kurve vierter Ordnung ohne Doppelpunkte ganz im Endlichen liegt. (2)

Wir denken uns im folgenden durchgehend, dass dies erreicht werden ist.

Sind T, R, S drei auf einander folgende Inflexionspunkte der Kurve, wird der eine aber auch nur der eine der Bögen TR und RS Berührungspunkte mit Doppeltangenten enthalten. (3)

Es sei A ein Berührungspunkt einer Doppeltangente mit dem Elementarbogen TR, und es liege auf den Bogen AR von TR kein weiterer solcher Punkt. Bewegt sich M stetig auf den Bogen AR von A bis R, müssen dabei zwei Tangentialpunkte N_1 und N_2 auftreten, welche sich in entgegengesetzten Sinnen bewegen, denn wenn M in R gelangt, existieren sicher zwei Tangentialpunkte. Geht M in demselben Sinne laufend auf den Bogen RS über, dann laufen jetzt die zwei Tangentialpunkte in demselben Sinne, und sie können desshalb nicht zusammenfallen, ehe M den Punkt S erreicht hat. Geht M weiter über S auf den nächsten von zwei Inflexionspunkten S und U begrenzten Elementarbogen über, werden die zwei Tangentialpunkte N_1 und N_2 anfangs in entgegengesetzten Sinne laufen, und es sei N_1 der Punkt, der sich in S mit M vereinigt. Enthält nun der Bogen SU keinen Berührungspunkt mit einer Doppeltangente, existieren N_1 und N_2 und behalten ihren Bewegungssinn, bis M in U gelangt. Hier müsste nun wieder M mit N_1 zusammenfallen, aber das ist unmöglich, weil N_1 und N_2 immer existierend einander nicht treffen können. Es muss also eine Doppeltangente den Bogen SU berühren.

Weil man nach (1) immer von einem Bogen ausgehen kann, der von einer Doppeltangente berührt wird, ist hiermit der Satz bewiesen.

Die Berührungspunkt A und B einer Doppeltangente sind die gemeinsamen

Endepunkte zweier Bögen σ_1 und σ_2 der Kurve. Diese zwei Bögen mit dem endlichen Geradenstück $\overline{AB}$ zusammen begrenzen zwei Gebiete (σ_1) und (σ_2). Von diesen wird das eine, sagen wir (σ_2), in dem anderen enthalten sein, denn die Gebiete, sind endlich, liegen auf derselben Seite von $AB = t$, und die Bögen σ_1 und σ_2 haben ausser A und B keinen Punkt mit einander gemein. Wir nennen σ_1 den äusseren, σ_2 den inneren Bogen. Jede Gerade, die einem Punkt von (σ_2) enthält, muss jedenfalls einen Punkt mit σ_1 gemein haben, denn höchstens ein Schnittpunkt mit der Begrenzung von (σ_1) kann auf AB fallen. Es kann desshalb σ_2 keine Doppeltangenten haben; man hat aber auch noch:

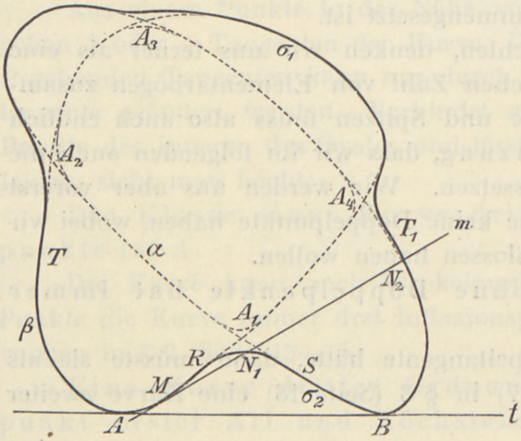

Fig. 12.

(4) Ein innerer und der zugehörige äussere Bogen können keine Tangente mit einander gemein haben.

Weil eine gemeinsame Tangente m jedenfalls keine Wendetangente sein kann, muss der Teil von m, der nahe am Berührungspunkte M mit σ_1 liegt, auf einer bestimmten Seite von σ_1 liegen, entweder innerhalb des Gebietes (σ_1) oder ausserhalb desselben. Im ersten Falle müsste m mit der Begrenzung von (σ_1) zwei von M verschiedene Punkte gemein haben, also jedenfalls einen solchen mit σ_1, was unmöglich ist. Dasselbe gilt aber auch im zweiten Falle, denn m enthält immer einen Punkt des Inneren von (σ_1), nämlich der Berührungspunkt mit σ_2.

(5) Ein innerer Bogen enthält immer zwei und nur zwei Inflexionspunkte.

Es sei M ein A naheliegender Punkt von σ_2 und m die Tangente in M. Diese muss, weil sie der Dobbeltangente $AB = t$ naheliegend ist, entweder (ausserhalb M) keinen Punkt mit der Kurve gemein haben oder auch dieselbe in zwei B naheliegenden Punkten schneiden. Es muss aber das letztere hier der Fall sein, weil m den in (σ_1) liegenden Punkt M enthält. Wenn nun M den Bogen σ_2 von A bis B durchläuft, bleiben die zwei Tangentialpunkte N_1 und N_2 von einander getrennt (infolge (4)), bis M in B gelangt. Wenn nun N_1 derjenige Tangentialpunkt ist, der anfangs sich auf σ_2 befindet, werden M und N_1 sich anfangs in entgegengesetzten Sinne bewegen — M von A nach B, N_1 von B nach A. Dieses Verhältniss kann sich nicht ändern, wenn man voraussetzt, dass auf σ_2 kein Inflexionspunkt liegt. Wenn aber M von A aus in B gelangt ist, muss N_1 entweder gleichzeitig in A gelangen oder aber es muss N_1 schon früher den Punkt A überschritten haben um auf σ_1 überzugehen. In jedem Falle müssten M und N_1 auf σ_2 zusammengetroffen sein, was doch unmöglich ist, wenn sich auf σ_2 kein Inflexionspunkt befindet. Dass sich nun auf σ_2 nur ein einzelner Inflexionspunkt R befindet, ist unmöglich, denn sind T, R, S drei auf einander folgende Inflexionspunkte der ganzen Kurve, müsste jedenfalls nach (3) einer der Bögen TR und RS von Berührungspunkten mit Doppeltangenten frei sein — während doch A auf dem einen und B auf dem anderen dieser Bögen liegt. Wenn die Kurve nur zwei Inflexionspunkte, speziell S und R hätte, kann nur der eine der Bögen RS Berührungspunkte mit einer Doppeltangente enthalten (es folgt dies sogleich aus dem Beweise von (3)).

Drei Inflexionspunkte auf σ_2 sind aber auch unmöglich, weil dann infolge (3) aber in Streit mit (4) auf σ_2 ein Berührungspunkt mit einer Doppeltangente liegen würde.

Es finden sich also auf σ_2 zwei und nur zwei Inflexionspunkte und wir wollen im folgenden sagen, dass diese ein Inflexionspaar bilden; jeder Doppeltangente einer Kurve ohne Doppelpunkte entspricht ein solches Paar.

Man hat nun endlich den Hauptsatz:

Alle Inflexionspunkte einer Kurve vierter Ordnung ohne Doppelpunkte ordnen sich in Inflexionspaare. (6)

Der Satz ist nach (5) selbstverständlich, wenn nur zwei Inflexionspunkte vorhanden sind. Im allgemeinen Fall seien R, S, T_1 drei auf einander folgende Inflexionspunkte und es sei RS ein Bogen auf den kein Berührungspunkt mit einer Doppeltangente liegt. Es laufe nun ein Punkt M von S nach T_1 (nicht über R), und es sei B der erste Berührungspunkt einer Doppeltangente t, den er trifft. Weil die Tangente m in M die Kurve ausserhalb M schneiden muss, bis M in B gelangt ist, muss der durchlaufene Bogen SB auf einem zu t gehörigen inneren Bogen liegen, und dieser muss dann R und S enthalten. Geht M über B weiter, muss er, ehe er T_1 erreicht, noch einen Berührungspunkt A_1 einer Doppeltangente t_1 überschreiten. Dem t_1 entsprechenden Inflexionspaar gehört T_1 an, und so kann man weiter gehen.

Die Form der Kurve ist nun unzweifelhaft. Man kann sie leicht konstruktiv aus zwei Ovalen α und β erhalten; es mögen diese einander in den auf einander folgenden Punkten $A_1 A_2 A_3 \ldots A_{2n}$ schneiden, und es mögen die Bögen A_1A_2, A_3A_4, ... von α innerhalb β liegen. Geht man dann von A_1 nach A_2 längs β, von A_2 nach A_3 längs α, von A_3 nach A_4 längs β u.s.w., hat man eine Kurve durchgelaufen, welche nach Abrundung der Winkelpunkte $A_1\ A_2\ A_3\ \ldots A_{2n}$ eine Kurve vierter Ordnung ohne Doppelpunkte sein wird.

Die Restkurve ist zweiter Ordnung und macht die erste Kurve vollständig. Ich übergehe aber, was man hier und im folgenden über vollständigen — aus mehreren Zweigen zusammengesetzten — Kurven sagen kann.

§ 7.

Einteilung der Kurven vierter Ordnung mit Doppelpunkten in drei Gattungen.

Es sei O ein Doppelpunkt der Kurve. Nach § 4 Beispiel 2 S. 26 hat man gleich:

(1) Aus jedem Doppelpunkte O gehen zwei oder auch keine Tangenten, welche ausserhalb O berühren.

Wenn aus O keine Tangente geht, heisst O ein Doppelpunkt erster Art; sonst ist er zweiter Art. Man hat nun den Hauptsatz:

(2) Wenn die Doppelpunkte einer völlig stetigen Kurve vierter Ordnung nicht alle derselben Art sind, muss die Kurve drei Doppelpunkte haben.

Wir können davon ausgehen, dass die Kurve keine Spitzen hat, sonst würden alle Doppelpunkte der zweiten Art hinzuzurechnen sein. Es folgt dann der Satz aus Beispiel 3 in § 4 S. 26 für $n = 4$. Es wäre hiernach naheliegend als Einteilungsprinzip die Art der Doppelpunkte zu wählen, und Kurven mit drei Doppelpunkten als eine besondere Art auszuheben. Man würde aber hierdurch Kurven mit sehr verschiedenen Eigenschaften als einer Gattung angehörig nehmen. Es empfiehlt sich noch auf die von jedem Doppelpunkte ausgehenden Pseudozweige Rücksicht zu nehmen. Es ist hier jeder Pseudozweig entweder 2ter, 3ter oder 4ter Ordnung. Besonderes Interesse hat es, ob die Ordnung paar oder unpaar ist, wobei man nicht vergessen muss, dass die Verhältnisse bei den verschiedenen Doppelpunkten verschieden sein können. Wir wollen nun als einer bestimmten Gattung angehörig diejenigen Kurven betrachten, von denen wenigstens ein Pseudozweig — und also auch der komplementäre — unpaar ist. Wir werden übrigens durch die folgenden Sätze sehen, dass die zwei genannten Einteilungsgründe nicht von einander unabhängig sind.

(3) Hat eine völlig stetige Kurve vierter Ordnung einen Doppelpunkt A erster Art, und sind alle Pseudozweige paar, dann werden alle diese, mit eventueller Ausnahme der von A ausgehenden, ohne Doppelpunkte sein.

Es sei B ein anderer Doppelpunkt gleichviel ob erster oder zweiter Art. Wir zerlegen die Kurve in die zwei von B ausgehenden Pseudozweige β_1 und β_2, und zeigen erstens, dass A kein Doppelpunkt auf β_1 oder β_2, sagen wir auf β_1, sein kann. Nehmen wir nämlich an, A sei ein Doppelpunkt auf β_1; der andere Zweig β_2 geht dann nicht durch A. Weil durch A keine Tangente an β_2 geht, schneidet jede durch A gehende Gerade β_2 in derselben Zahl von Punkten. Freilich wäre es möglich, dass bei der Drehung der Gerade um A zwei Schnittpunkte mit β_2 in B verloren oder gewonnen werden könnten, wenn nämlich die Gerade AB in B eine uneigentliche Tangente von β_2 wäre. Das ist aber nicht möglich, weil eine einmalige Änderung um ± 2 bei der ganzen Drehung um A unstatthaft ist. Jede durch A gehende Gerade müsste also β_2 in zwei Punkten schneiden. Eine Tangente in A an β_1 schneidet aber β_1 in drei (zusammenfallenden) Punkten, und würde also $\beta_1 + \beta_2$ in mindestens 5 Punkten schneiden. Weil dies unstatthaft ist, muss demnach A ein Schnittpunkt von β_1 und β_2 sein. Es kann aber ferner β_1 keinen neuen Doppelpunkt C haben. Die Gerade AC würde nämlich, weil A ein einfacher Schnittpunkt sowohl mit β_1 als mit β_2 ist, diese beiden Zweige wenigstens in einem von A und C verschieden Punkte schneidenen müssen, und also $\beta_1 + \beta_2$ in wenigstens 6 Punkten.

Eine völlig stetige Kurve vierter Ordnung, deren Doppelpunkte nicht alle derselben Art sind, lässt sich immer in zwei komplementäre unpaare Pseudozweige zerlegen. (4)

Es sei A ein Doppelpunkt erster Art, B ein ebensolcher zweiter Art. Nach (2) hat die Kurve ausser A und B noch einen Doppelpunkt C. Von diesem letzteren aus zerlegen wir die Kurve in zwei Pseudozweige γ_1 und γ_2. Wären nun alle Pseudozweige paar, dann würde nach (3) sowohl A als auch B ein Schnittpunkt von γ_1 mit γ_2 sein. Aus B gehen aber zwei Tangenten, welche $\gamma_1 + \gamma_2$ ausserhalb B berühren; und es sei t eine solche die z. B. γ_1 berühren mag. Diese Gerade t würde γ_1 in vier, γ_2 in wenigstens zwei Punkten schneiden, was nicht angeht.

Wenn wir also aus der Gesammtheit aller Kurven vierter Ordnung mit Doppelpunkten diejenigen heraushebeu, welche Pseudozweige unpaarer Ordnung haben, bleiben nur Kurven zurück, deren Doppelpunkte sämtlich derselben Art sind.

Wir teilen deshalb die Kurven vierter Ordnung in die Gattungen II, III, IV ein — wobei die Kurven ohne Doppelpunkte als einer Gattung I angehörig betrachtet werden mögen:

II. Kurven mit unpaaren Pseudozweigen.

III. Kurven, deren Pseudozweige alle paar, und deren Doppelpunkte alle erster Art sind.

IV. Kurven, deren Pseudozweige alle paar, und deren Doppelpunkte alle zweiter Art sind.

---

§ 8.

Kurven vierter Ordnung mit unpaaren Pseudozweigen.

Wir wollen bis weiter voraussetzen, dass die Tangenten in einem Doppelpunkte nicht zusammenfallen.

Es sei nun O ein Doppelpunkt von dem aus die Kurve sich in zwei Pseudozweige γ_1 und γ_2 unpaarer und also dritter Ordnung zerlegen lässt. Weil jede Gerade sowohl γ_1 wie γ_2 schneiden müss, wird jede Gerade zwei oder vier Punkte mit der Kurve gemein haben. Es ist also nicht möglich die Kurve ins Endliche zu projicieren.

Es können die Zweige γ_1 und γ_2 keine Tangente mit einander gemein haben, denn eine solche würde die Kurve in 6 Punkten schneiden. Man hat also:

(1) Eine Kurve vierter Ordnung zweiter Gattung hat keine Doppeltangenten.

Wir werden im folgenden sehen, dass alle andere Kurven vierter Ordnung als diejenigen zweiter Gattung Doppeltangenten haben.

Rundet man die in O auftretenden Winkelpunkte in der früher genannten Weise ab, haben γ_1 und γ_2 jetzt nicht mehr O gemein, und sie werden sich deshalb in wenigstens einem von O verschiedenen Punkte schneiden. Mehr als einen Schnittpunkt können die abgerundeten Pseudozweige aber nicht haben, denn die Verbindungsgerade dieser Punkte würde 6 Punkte mit γ_1 und γ_2 gemein haben.

Die eine der Pseudozweige kann einen Doppelpunkt haben, nicht aber beide, denn die Verbindungsgerade zweier Doppelpunkte würde wieder 6 Punkte mit der ganzen Kurve gemein haben, ɔ:

(2) Eine Kurve vierter Ordnung zweiter Gattung hat entweder zwei oder auch drei Doppelpunkte.

Wir betrachten zuerst den Fall, dass die Kurve zwei Doppelpunkte hat. Wenn nun O kein Inflexionspunkt der Kurve ist, wird er entweder auf γ_1 sowie auch auf γ_2 ein Winkelpunkt zweiter Art sein, oder auch wird er auf γ_1 (oder γ_2) ein Winkelpunkt erster Art, auf γ_2 (oder γ_1) dritter Art sein. Aus dem Satze (9) § 5 folgt also, dass die Kurve $2+2$ oder auch $1+3$, also in beiden Fällen vier Inflexionspunkte haben wird. Dies bleibt auch noch richtig, wenn Inflexionspunkte in O fallen. Ist nämlich O auf einem und nur einem der durch O gehenden Bögen ein Inflexionspunkt, dann wird eine und nur eine in O berührende Tangente keine Punkte ausserhalb O mit der Kurve gemein haben. O muss deshalb nach (10) § 5 S. 30 auf γ_1 (oder auf γ_2) ein Winkelpunkt erster Art, auf γ_2 (oder γ_1) aber zweiter Art sein. Ist aber O ein Inflexionspunkt auf den beiden durch O gehenden Bögen, dann wird keine der Tangenten in O nochmals schneiden, und O wird auf beiden Pseudozweigen ein Winkelpunkt erster Art sein. Man hat also nach (9) § 5 S. 30 in allen Fällen:

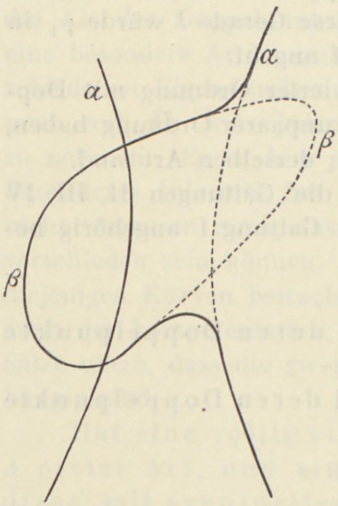

Fig. 13.

(3) Eine Kurve vierter Ordnung zweiter Gattung mit zwei Doppelpunkten hat vier Wendetangenten.

Eine Kurve dieser Art findet sich sicher auch unter den nicht analytischen Kurven. Man braucht nur zwei Kurven zweiter Ordnung zu nehmen, von welchen die eine α ins Unendliche geht, während die andere β endlich ist. Schneidet dann β sowohl den einen wie den anderen der zwei Bögen, in welche α durch die unendlich fernen Punkte zerlegt wird, dann haben α und β vier Punkte, aber keine Tangenten mit einander gemein[1]. Durch passend gewählte Auslassung von Bögen

[1] Der Beweis ist leicht zu führen. Siehe: Om Ikke-analytiske Kurver, S. 58. (Kgl. d. V. S. Skr. 1906).

und entsprechende Abrundung von Winkelpunkten erhält man eine Kurve der gewünschten Art. Es möge dies mit einem Hinweis auf Fig. 13 abgemacht sein.

Wir gehen jetzt zu den Kurven mit drei Doppelpunkten über. Es habe von den zwei von O ausgehenden Pseudozweigen γ_1 und γ_2 der eine, sagen wir γ_1 einen Doppelpunkt O_2. Zu O_2 gehören auf γ_1 zwei Pseudozweige γ_1' und γ_1'', von welchen der eine γ_1'' zweiter Ordnung ist. Man hat nun die zwei Möglichkeiten, dass O entweder auf dem unpaaren Zweig γ_1' oder auf γ_1'' liegt. Im ersten Falle ist O auf γ_1 entweder ein Winkelpunkt zweiter oder dritter Art, denn O kann nicht erster Art sein, weil sonst γ_1' zwei Winkelpunkte erster Art erhalten würde, was unmöglich ist. (Siehe (8) § 5 S. 30). Wenn nun kein Inflexionspunkt in O liegt, dann wird O auf γ_2, bzw. entweder ein Winkelpunkt zweiter oder auch erster Art sein. Es giebt demnach auf $\gamma_2 + \gamma_1'$ also auch auf $\gamma_2 + \gamma_1$, entweder $2 + 0$ oder auch $1 + 1$ Inflexionspunkte. Dieselbe Zahl von Inflexionspunkten erhält man aber auch, wenn O auf γ_1'' liegt; in diesem Falle muss nämlich O auf γ_1'' ein Winkelpunkt dritter Art und zugleich auf γ_2 erster Art sein. Dasselbe gilt wie leicht zu sehen auch noch, wenn Inflexionspunkte in O fallen. Man hat also:

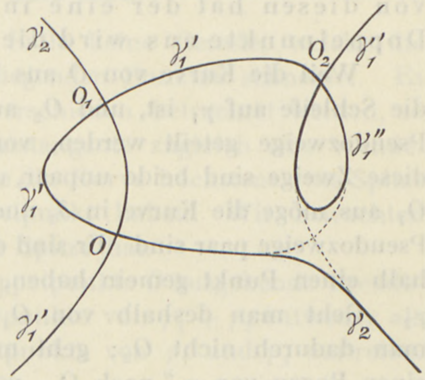

Fig. 14.

Eine Kurve vierter Ordnung zweiter Gattung mit drei Doppelpunkten hat immer zwei Wendetangenten. (4)

Es gibt dem obigen zufolge zwei verschiedene Arten von Kurven zweiter Gattung mit drei Doppelpunkten jenachdem — mit den obigen Benennungen — O auf dem unpaaren Zweig γ_1' oder auf dem Ovale eines zu O_2 gehörigen Pseudozweiges liegt.

Im ersten Falle sieht man leicht, dass die Kurve auch aus dem dritten Doppelpunkte O_1 in zwei unpaare Pseudozweige geteilt wird. Rundet man nämlich die Winkelpunkte in O_1 ab, erhält man zwei Kurven, die nur den Punkt O mit einander gemein haben, und also nicht paar sein können.

Die Form dieser Kurve ist nun unzweifelhaft, weil man alle mögliche Formen von Kurven dritter Ordnung im Voraus kennt. Die einfachste Konstruktion erhält man mittels den schon betrachteten zwei Kurven α und β zweiter Ordnung. Es möge genügen auf die Figur 14 hinzuweisen.

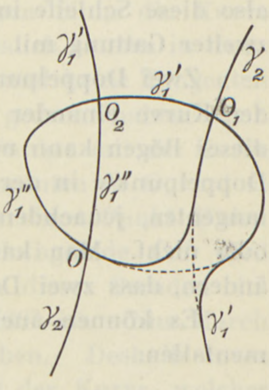

Fig. 15.

Um die Gestalt der Kurve in dem Falle festzulegen, wo O auf einer Schleife γ_1'' von γ_1 liegt, können wir für diese Kurve den folgenden Satz aufstellen:

(5) Wird die Kurve von O aus in Pseudozweige dritter Ordnung zerlegt, von welchen der eine in O_2 einen Doppelpunkt hat, dann wird sie auch von O_2 aus in Pseudozweige dritter Ordnung zerlegt, und von diesen hat der eine in O einen Doppelpunkt. Von dem dritten Doppelpunkte aus wird die Kurve in paare Pseudozweige zerlegt.

Weil die Kurve von O aus in γ_2 und $\gamma_1' + \gamma_1''$ zerlegt wird, wo γ_1'' wie oben die Schleife auf γ_1 ist, und O_2 auf γ_1'' liegt, muss die Kurve von O_2 aus in zwei Pseudozweige geteilt werden, von welchen der eine γ_1', der andere $\gamma_1'' + \gamma_2$ ist; diese Zweige sind beide unpaar, und der letztere hat einen Doppelpunkt in O. Von O_1 aus möge die Kurve in δ_1 und δ_2 zerlegt werden; wir wollen zeigen, dass diese Pseudozweige paar sind. Er sind die Zweige γ_1' und γ_2 beide unpaar und müssen deshalb einen Punkt gemein haben, der O_1 sein muss; O_1 liegt also auf γ_1' und auf γ_2. Geht man deshalb von O_1 auf einem Bogen von γ_2 nach O, überschreitet man dadurch nicht O_2; geht man der Kurve entlang weiter, kommt man über einen Bogen von γ_1'' nach O_2, von da kommt man über einen Bogen von γ_1' nach O_1 zurück ohne dabei denselben Punkt zweimal überschritten zu haben. Es hat also δ_1 keinen Doppelpunkt, und schneidet δ_2 in den zwei Punkten O und O_2; δ_1 und δ_2 sind deshalb beide paar.

Eine Kurve der letztgenannten Art, kann man wieder durch zwei Kurven α und β ähnlich wie früher konstruiren. (Siehe Figur 15).

Wir haben bisher die Kurven mit solchen Doppelpunkten ausgeschlossen, dessen Tangenten zusammenfallen. Hat man eine Kurve mit einer Spitze A, kann man aber die A naheliegenden Bögen so ein wenig ändern, dass man dadurch eine kleine Schleife erhält. Hierdurch wird weder Ordnung noch Gattung der Kurve geändert. Weil nämlich aus A keine Tangente an die Kurve geht, erhält man durch die Änderung keine neue Doppeltangenten. Die einzige Kurve zweiter Gattung mit einer Schleife ist nun von der in Figur 14 dargestellten Typus. Zieht man also diese Schleife in eine Spitze zusammen, erhält man die einzig mögliche Kurve zweiter Gattung mit einer Spitze. Die Kurve hat zwei Wendetangenten.

Zwei Doppelpunktstangenten können auch zusammenfallen, wenn zwei Bögen der Kurve einander in einem Punkte B berühren. Durch eine kleine Änderung dieser Bögen kann man offenbar eine Kurve derselben Gattung erhalten, wo zwei Doppelpunkte in der Nähe von B auftreten. Die Kurve hat zwei oder vier Wendetangenten, jenachdem sich auf der Kurve ausser B noch ein Doppelpunkt findet oder nicht. Man kann leicht die in Figur 13, 14, 15 dargestellten Kurven so abändern, dass zwei Doppelpunkte in einen Selbstberührungspunkt zusammenfallen.

Es können auch alle drei Doppelpunkte in einen dreifachen Punkt zusammenfallen.

§ 9.

Kurven vierter Ordnung, deren Pseudozweige alle paar und deren Doppelpunkte alle erster Art sind.

Aus einem Doppelpunkte O geht in diesem Falle keine Gerade, welche die Kurve in zwei zusammenfallenden ausserhalb O liegenden Punkten schneidet. Es soll dabei ein Nachbarpunkt von O als von O verschieden betrachtet werden, so dass es ausgeschlossen ist, dass eine Doppelpunktstangente zugleich eine Wendetangente ist. Es kann ferner der Definition zufolge die Kurve höchstens eine Spitze und in diesem Falle keinen eigentlichen Doppelpunkt haben. Wir betrachten zuerst den allgemeinen Fall, dass die Kurve keine Spitze hat.

Zerlegt man die Kurve in zwei von einem Doppelpunkte O ausgehende Pseudozweige γ_1 und γ_2, können allgemein gesagt Doppelpunkte von $\gamma_1 + \gamma_2$ entweder als solche auf γ_1 oder auf γ_2 oder auch als Schnittpunkte von γ_1 und γ_2 auftreten. Hier hat man aber sogleich nach (3) § 7 S. 34:

Bei den Kurven dritter Gattung kann kein Pseudozweig Doppelpunkte haben. (1)

Man hat ferner:

Die Zahl der Doppelpunkte einer Kurve dritter Gattung ist unpaar. (2)

Trennt man nämlich die zu einem Doppelpunkte O gehörigen Pseudozweige von einander durch einen Schnitt in O, und rundet man die zwei in O auftretenden Winkelpunkte ab, erhält man zwei einfache Kurven paarer Ordnung, die nicht in O zusammenhängen, und entweder keine oder auch eine paare Zahl von Punkten mit einander gemein haben.

Die zwei Tangenten in einem Doppelpunkte O schneiden einen und denselben zu O gehörigen Pseudozweig. (3)

Denken wir uns einen Punkt M, der immer in demselben Sinne die Kurve von O aus durchläuft. Die Halbgerade OM wird sich dann auch immer in demselben Sinne um O drehen, weil die Kurve keine Spitzen hat und keine Tangenten aus O gehen. Ferner wird die Halbgerade sich eben um 360° gedreht haben, wenn M in O zurückkehrt, weil sonst eine Gerade mehr denn vier Punkte mit der Kurve gemein haben könnte. Es seien nun t_1 und t_2 die zwei Tangenten in O, und es schneide t_1 den einen Pseudozweig γ_1 in N_1, und man lasse einen Punkt M den anderen Zweig γ_2 von O bis O zurück durchlaufen. Die Halbgerade OM wird dabei entweder t_1 und t_2 nicht überschritten haben oder jede dieser Geraden einmal, jenachdem der Drehwinkel kleiner oder grösser als 180° ist. Nur durch Überschreiten von O kann ein Punkt von γ_1 auf γ_2 übergehen. Deshalb muss derjenige Schnittpunkt X der sich drehenden Geraden OM mit der Kurve, welcher sich ursprünglich in N_1 befand, nach Beendigung der Drehung sich wieder auf γ_1 befinden; X kann nicht gleichzeitig mit M nach O konvergieren, weil die Tangente in O keine Wendetangente ist.

Derjenige Pseudozweig, der von den beiden Tangenten in O geschnitten wird, werden wir den zu O gehörigen äusseren Pseudozweig γ_a nennen; der andere Zweig ist der innere Zweig γ_i.

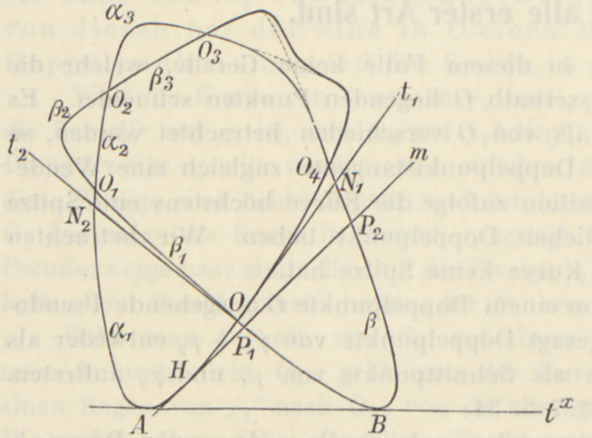

Fig. 16.

(4) Ein Doppelpunkt O ist ein Winkelpunkt dritter Art auf dem zum O gehörigen inneren Zweig; auf dem äusseren Zweig wird O also ein Winkelpunkt erster Art sein.

Es sei M ein O naheliegender Punkt auf γ_i, so dass OM der Tangente t_1 naheliegend ist. Die Tangente in M wird dann γ_a in einem dem obengenannten Punkte N_1 naheliegenden Punkte schneiden und muss also, weil γ_a paarer Ordnung ist, nochmals γ_a in einem Punkte schneiden. Die Tangente in M schneidet also überhaupt nicht γ_i. Weil dasselbe auch noch richtig bleibt, wenn t_1 mit t_2 vertauscht wird, ist O den Definitionen zufolge auf γ_i ein Winkelpunkt dritter Art.

Auf der Kurve treten ausser den Doppelpunkten selbverständlich im allgemeinen Inflexionspunkte auf.

Die letzteren können in Inflexionspaaren auftreten; zwei Inflexionspunkte — sagen wir — bilden ein Paar, wenn sie auf einem Bogen liegen, der von den Berührungspunkten mit einer Doppeltangente begrenzt wird, und dieser Bogen weder einen anderen singulären Punkt noch einen Berührungspunkt einer anderen Doppeltangente enthält. Die zugehörige Doppeltangente nennen wir eine Doppeltangente erster Art; ein Inflexionspunkt, der nicht Element eines Paares ist, nennen wir isoliert; eine Doppeltangente, die nicht erster Art ist, nennen wir zweiter Art. Bei den Kurven vierter Ordnung ohne Doppelpunkte haben wir gesehen, dass zwei Inflexionspunkte W_1 und W_2 immer ein Paar bilden, wenn sie Endpunkte eines Bogens sind, welcher keinen Berührungspunkt einer Doppeltangente enthält.

(5) Jedem Doppelpunkte entspricht eine Doppeltangente zweiter Art der Kurve; sonst hat dieselbe nur Doppeltangenten erster Art und sämmtliche Inflexionspunkte ordnen sich in Paaren an.

Abrunden wir nämlich den Winkelpunkt O sowohl auf γ_a wir auf γ_i, treten infolge (4) auf γ_i keine neue singulären Punkte auf, während auf γ_a zwei neue Wendepunkte W_1 und W_2 hervortreten, welche O beliebig naheliegend angenommen werden können. Weil γ_a und γ_i ohne Doppelpunkte sind, treten nach der Abrundung auf beiden nur Doppeltangenten erster Art und nur Inflexionspunkte in Paaren auf. Auf γ_a müssen aber W_1 und W_2 ein Paar bilden; weil nämlich aus

O keine Tangenten an γ_a gehen, kann auch in beliebiger Nähe an O keine Tangente an γ_a gehen, so dass auf den kleinen Bogen $W_1 W_2$ kein Berührungspunkt einer Doppeltangente liegen kann. Den Punkten W_1 und W_2 entspricht also eine ganz bestimmte Doppeltangente t^*. Sind A und B deren Berührungspunkte, liegen auf dem Bogen $AW_1 W_2 B$ ausser W_1 und W_2 kein Inflexionspunkt, und ausser A und B keine Berührungspunkte einer Doppeltangente von γ_a.

Hebt man nun die Abrundung auf, bleiben auf γ_i immer nur Inflexionen in Paaren mit den zugehörigen Doppeltangenten erster Art, während auf γ_a noch eine Dobbeltangente zweiter Art t^* übrig bleibt. Die eben genannten Eigenschaften des Bogens $AW_1 W_2 B$ gehen auf den Bogen AOB über. Es kann ferner auf diesem Bogen auch kein Doppelpunkt liegen; es genügt den Bogen OA zu betrachten. Ist nämlich t_1 die Tangente des Bogens in O, wird eine t_1 naheliegende Tangente von γ_a diesen Zweig zweimal schneiden — einmal in einem dem oben genannten Punkte N_1 naheliegenden Punkte und einmal in einem O naheliegenden Punkte, weil O auf γ_a ein Winkelpunkt erster Art ist. Wenn also ein Punkt M den Bogen OA von O bis A durchläuft, wird die Tangente m in M immer γ_a zweimal schneiden, weil auf OA kein Berührungspunkt mit einer Doppeltangente von γ_a liegt. Weil also m den Zweig γ_a in zwei Punkten (ausserhalb M) schneidet, kann sie keinen Punkt mit γ_i gemein haben, so dass auf den Bogen OA kein Schnittpunkt von γ_a mit γ_i liegen kann. Die zwei Tangentialpunkte P_1 und P_2 von M behalten ihren Bewegungssinn, wenn M es thut, weil auf OA kein Inflexionspunkt liegt. Wenn aber M in der Nähe von A ist, laufen P_1 und P_2 in entgegengesetzten Sinnen, und sie werden es desshalb überall so thun, auch wenn M in der Nähe von O ist. Lassen wir nun M den Punkt O überschreiten um auf γ_i einzutreten, wird von den zwei Tangentialpunkten P_1 und P_2 der eine und nur der eine seinen Bewegungssinn ändern, so dass P_1 und P_2 anfangs in demselben Sinne auf γ_a laufen. Es kann in diesen Verhältnissen nur dann eine Änderung eintreten, wenn M einen neuen Doppelpunkt O_1 überschreitet. Auf dem Bogen OO_1 kann also kein Berührungspunkt mit einer Doppeltangente liegen — weil die Tangentialpunkte in demselben Sinne laufen — und kein Inflexionspunkt, weil jede Tangente den Zweig γ_a zweimal schneidet.

Wir haben hier vorausgesetzt, dass $OO_1 = \sigma$ ein Bogen des zu O gehörigen inneren Bogens ist. Aber σ wird auch dem inneren Zweig von O_1 angehören, denn es wird ja dem eben gesagten zufolge ein dem Doppelpunkte naheliegender Bogen eines (diesem Doppelpunkte angehörigen) inneren Zweiges eben dadurch charakterisirt, dass die entsprechenden Tangentialpunkte auf der Kurve in demselben Sinne laufen.

Betrachten wir nun endlich die ganze Kurve und bezeichnen wir die Doppelpunkte in der Ordnung, in der sie auf dem inneren Zweig γ_i auf einander folgen, mit O, O_1, $O_2 \ldots O_{2n}$. Wir schneiden nun von der Kurve alle die inneren Bögen OO_1, $O_1 O_2, \ldots O_{2n} O$ ab. Man erhält so eine Kurve vierter Ordnung ohne Doppelpunkte, die $2n+1$ Winkelpunkte erster Art aber sonst ganz dieselben Doppeltangenten und Inflexionspunkte wie die ursprüngliche Kurve haben muss. Rundet man sämtliche Winkelpunkte ab, erhält man eine Kurve vierter Ordnung mit lauter Doppeltangenten erster Art und lauter Inflexionspunkten in Paaren. Nach Aufhebung der Abrundung bleiben sämtliche Inflexionspunkte ausser denjenigen, welche $O_1 O_1 \ldots.$ beliebig nahe liegen, und es werden nur diejenigen Doppeltangenten, welche den verschwundenen Inflexionspaaren entsprechen, in Doppeltangenten zweiter Art übergehen.

Es ist besonders der Fall zu betrachten, dass die Kurve nur einen Doppelpunkt hat. Hier muss dem Beweise des Satzes (5) zufolge jede Tangente des inneren Zweiges γ_i den äusseren Zweig in zwei getrennten Punkten schneiden; γ_i hat also weder Inflexionen noch Doppeltangenten und muss desshalb eine Kurve zweiter Ordnung sein, welche in O einen Winkelpunkt dritter Ordnung hat. In Verbindung mit dem obigen ist hierdurch die ganze Kurve charakterisirt.

Es ist möglich, dass das Oval zusammenschrumpft, so dass eine Spitze hervortritt. Diese muss eine Spitze erster Art sein. Die Kurve hat ausser dieser Spitze und einer Doppeltangente zweiter Art nur Inflexionen in Paaren mit den zugehörigen Doppeltangenten.

Was nun der nicht-algebraischen Existenz der hier betrachteten Gattung von Kurven anbelangt, ist dieselbe leicht fest zu stellen. Hierbei lassen wir die Kurve mit einem Doppelpunkt beiseite; wir werden dieselbe später in anderer Weise konstruiren.

Weil die Kurve jedenfalls eine Doppeltangente hat, können wir im projektiven Sinne davon ausgehen, dass die Kurve ganz im Endlichen liegt. Man nehme nun zwei Ovale α, β, die einander in den — auf α oder β — auf einander folgenden Punkten O_1, $O_2 \ldots O_{2n}$ schneiden mögen. Die zwei Ovale zusammengenommen bestimmen ein zusammenhängendes Gebiet, dessen Begrenzung abwechselnd aus einem Bogen von α und einem Bogen von β besteht. Es sei die Begrenzung: $\alpha_1 \beta_2 \alpha_3 \ldots \alpha_{2n}, \beta_{2n}$.

In einer unpaaren Zahl von Punkten O nehmen wir die Abrundung vor, indem wir in früher genannter Weise α_r und β_{r+1} — oder β_s und α_{s+1} — durch einen kleinen Bogen verbinden. Wenn wir aber z. B. α_r und β_{r+1} abrunden, runden wir auch den durch β_r und α_{r+1} bestimmten Winkelpunkt ab. Die übrigen Schnittpunkte lassen wir unberührt. Es entsteht so eine Kurve, deren Pseudozweige alle paar und deren Doppelpunkte alle erster Art sind. Man muss nur noch sehen, dass die Kurve nicht zerfällt. Wir haben aber unpaarmal abgerundet. Fängt man also den Durchlauf der Kurve von einem Doppelpunkte O aus auf einem Bogen von α an, dann kommt man auf einen Begen von β zurück, aber, wenn man O das zweite Mal erreicht, auf einem Bogen von α.

Man kann übrigens die konstruirte Kurve als die allgemeinste dieser Gattung betrachten.

§ 10.

Allgemeine Eigenschaften und Einteilung der Kurven vierter Gattung.

Bei den Kurven dritter Gattung waren alle Doppelpunkte Schnittpunkte komplementärer Pseudozweige. Hier hat man ganz im Gegenteil:

Zwei komplementäre Pseudozweige haben keinen anderen Punkt als den Doppelpunkt, von dem sie ausgehen, mit einander gemein. (1)

Es seien γ_1 und γ_2 die zwei von einem Doppelpunkte O ausgehenden Pseudozweige, und nehmen wir an, dass diese einen von O verschiedenen Punkt O_1 mit einander gemein haben. Es sei t eine durch O_1 gehende Tangente an z. B. γ_1, welche ausserhalb O_1 berührt. Diese Gerade kann nicht zugleich Tangente in O_1 sein, und dieser Punkt ist deshalb ein einfacher Schnittpunkt von t sowohl mit γ_1 als mit γ_2; die Gerade schneidet deshalb jeden der Zweige in mindestens noch einem Punkte, und $\gamma_1 + \gamma_2$ in mindestens 6 Punkten (von welchen zweimal zwei zusammenfallen), was unmöglich ist.

Sind O und O_1 zwei Doppelpunkte, und t eine von O ausgehende Tangente, welche ausserhalb O berührt, dann ist jede der Geraden O_1O und t in O eine uneigentliche Tangente der zu O gehörigen Pseudozweige γ_1 und γ_2. (2)

Wenn dies nämlich nicht der Fall wäre, würde O ein einfacher Schnittpunkt sowohl mit γ_1 als mit γ_2 sein, und eine der betrachteten Geraden würde jeden Zweig in noch einen Punkt schneiden, so dass sie wenigstens 6 Punkte (unter welchen zweimal zwei zusammenfallende) mit der Kurve gemein haben würde.

Jenachdem die Tangenten in einem Doppelpunkte O einen bestimmten der von O ausgehenden Pseudozweige ausserhalb O in 0, 1 oder 2 Punkten schneiden, werden durch O resp. 0, 1 oder 2 Tangenten an denselben Zweig gehen, welche ausserhalb O berühren. (3)

Nehmen wir erstens an, dass die beiden Tangenten t_1 und t_2 den Zweig γ_2 bzw. in N_1 und N_2 schneiden. Es seien a_1 und a_2 die bzw. t_1 und t_2 berührenden Bögen von γ_1. Durchläuft nun ein Punkt M den Zweig γ_1 von O bis O zurück, so dass er zuerst den Bogen a_1 durchläuft, dann wird die Gerade OM anfangs den Zweig γ_2 in einem Punkte schneiden, der N_1 benachbart ist. Ein Schnittpunkt kann aber nur durch den Punkt O von γ_2 auf γ_1 übergehen, und das ist hier nicht möglich, weil weder t_1 noch t_2 einen Punkt mit γ_1 gemein haben. Jede durch O gehende Gerade, welche γ_1 schneidet, wird also auch γ_2 schneiden, und desshalb kann durch O keine Tangente an γ_1 gehen.

Nehmen wir zweitens an, dass t_1 aber nicht t_2 einen Punkt N_1 mit γ_1 gemein hat. Wir lassen dann wieder M den ganzen Zweig γ_1 in einem bestimmten Sinne durchlaufen, so dass er zuerst den Bogen a_2 durchläuft. Bis M den Punkt N_1 erreicht, wird wie im ersten Fall die Gerade OM einen Punkt mit γ_2 gemein haben. Wenn M aber N_1 überschreitet, dann geht ein Schnittpunkt M' der Geraden OM mit der Kurve von γ_2 auf γ_1, und zwar durch O auf den Bogen a_1 über. M' bewegt sich also im entgegengesetzten Sinne von M, und M und M' müssen in dem Berührungspunkte einer aus O an γ_1 gehende Tangente zusammenfallen. Aber ganz dieselben Schlüsse zeigen, dass auch wenigstens eine γ_2 berührende Tangente durch O gehen muss. Es geht demnach in diesem Falle eine und nur eine Tangente aus O an γ_1, weil aus O nur zwei Tangenten an $\gamma_1 + \gamma_2$ gehen.

In dem Falle, wo t_1 und t_2 beide γ_1 schneiden, werden keine von diesen γ_2 schneiden, und wir kommen so auf den ersten Falle zurück.

In dem Beweise haben wir vorausgesetzt, dass die Tangenten in O nicht Wendetangenten sind. Der Satz gilt aber offenbar auch in diesem Fall, wenn man nur eine solche Wendetangente sowohl den durch O gehenden und ausserhalb O schneideden Geraden als auch den durch O gehenden und ausserhalb O berührenden Geraden hinzurechnet.

(4) Zwei komplementäre Pseudozweige haben immer zwei und nur zwei Tangenten mit einander gemein.

Es seien α und β die zwei komplementären Zweige, welche von einem Doppelpunkte O ausgehen, und es seien α^* und β^* die zwei völlig stetigen Kurven, welche entstehen, wenn die zwei in O auftretenden Winkelpunkte abgerundet werden. Es sei ferner t' eine aus O an $\alpha + \beta$ gehende Tangente, die z. B. α berühren möge. Es ist t' keine Tangente an β, weil aber die Abrundung beliebig klein gemacht werden kann, wird eine t' beliebig nahe liegende Gerade infolge (2) sowohl α^* wie β^* berühren, und der Berührungspunkt mit β wird O beliebig nahe liegen. (Siehe § 2, Seite 14).

Die Kurven α^* und β^* haben keinen Punkt mit einander gemein, und eine Wendetangente der einen Kurve kann die andere nicht schneiden. Infolge Beispiel II in § 4, Seite 25, haben α^* und β^* also entweder keine Tangente oder auch vier Tangenten mit einander gemein. Hier muss aber der letztere Fall eintreten, denn wir haben dem obigen zufolge schon zwei gemeinsame Tangenten nachgewiesen, welche den zwei aus O an $\alpha + \beta$ gehenden Tangenten t' und t'' beliebig nahe liegen. Wenn wir nun die Abrundung wieder aufheben, dann bleiben ausser den in t' und t'' fallenden Geraden noch zwei übrig, welche α und β berühren.

Charakteristisch für die Kurven vierter Gattung ist, wie wir sehen werden, das Auftreten von Schleifen; Schleife nennen wir einen paaren Pseudozweig, der keinen anderen Doppelpunkt enthält, als denjenigen, von dem sie ausgeht.

(5) Aus jedem Doppelpunkte geht eine und nur eine Tangente an jede Schleife, die nicht von demselben Doppelpunkte ausgeht.

Es sei (O_1) eine von O_1 ausgehende Schleife, und es sei O ein anderer Doppelpunkt. Verbindet man O mit einem Punkte M von (O_1), wird diese Gerade von der Schleife in noch einem Punkte P geschnitten. In der Nähe von O_1 laufen M und P in entgegengesetztem Sinne, weil O_1O eine uneigentliche Tangent in O_1 ist. Es giebt deshalb ausserhalb O noch ein Punkt, wo M und P zusammenfallen, womit der Satz bewiesen ist.

(6) Eine Kurve vierter Gattung hat mindestens zwei und höchstens drei Schleifen.

Wenn die Kurve nur einen Doppelpunkt hat, sind beide von diesem ausgehende Pseudozweige Schleifen. Hat die Kurve mehrere Doppelpunkte teilen wir sie wieder aus einem Doppelpunkt O in zwei Pseudozweige γ_1 und γ_2. Wenn γ_1 keine Schleife ist, sei O_1 ein Doppelpunkt auf γ_1. Von den beiden von O_1 ausgehenden Pseudozweigen wird der eine und nur der eine O enthalten (1); der andere sei γ_2', und dieser wird mindestens einen Doppelpunkt weniger haben als γ_1 denn nach (1) sind γ_1 und γ_2 von einander völlig getrennt. Man kann so fortsetzen, bis man an einen Pseudozweig ohne Doppelpunkt d. h. eine Schleife gelangt. Ebenso sieht man, dass in γ_2 wenigstens eine Schleife enthalten ist.

Mehr als drei Schleifen — von den Doppelpunkten O_1, O_2, O_3 ausgehend — kann die Kurve aber nicht haben, denn sonst würde dem Satze (5) zufolge aus O_1 mehr denn zwei Tangenten an die Kurve ausgehen, was ausgeschlossen ist.

Zwei Schleifen, die von verschiedenen Doppelpunkten ausgehen, haben immer eine und nur eine Tangente mit einander gemein. (7)

Es mögen die Schleifen (O) und (O_1) von den Doppelpunkten O und O_1 ausgehen. Durch O geht eine und nur eine Tangente an (O_1). Wenn nun M von O aus die ganze Schleife (O) durchläuft, wird aus M immer eine und nur eine Tangente an (O_1) gehen, denn keine Doppeltangente oder Wendetangente von (O_1) oder auch noch keine Tangente in O_1 kann (O) schneiden. Es besteht also eine (1 — 1) Korrespondenz zwischen M und dem Punkt P, wo die durch M an (O_1) gehende Tangente die Schleife (O) nochmals schneidet. Weil die aus O an (O_1) gehende Tangente in O eine uneigentliche Tangente ist (2), laufen M und P in der Nähe von O in entgegengesetzten Sinnen; es giebt aber also ausserhalb O noch einen Punkt, wo M und P zusammenfallen.

Wir wollen noch beweisen:

Auf einer Schleife, welche von einem Doppelpunkte O ausgeht, befinden sich 0, 1 oder 2 isolierte Inflexionspunkte jenachdem durch O 0,1 oder 2 Tangenten gehen, welche (O) ausserhalb O berühren. (8)

Wir haben schon oft benutzt, dass eine von O ausgehende Tangente t' an (O) eine uneigentliche Tangente in O ist. Runden wir nun den Winkelpunkt O auf (O) in gewöhnlicher Weise ab, erhält die abgerundete Kurve eine t' naheliegende Doppeltangente. Auf dem zugehörigen inneren Bogen finden sich demnach zwei Inflexionspunkte, und von diesen wird der eine in O fallen, wenn die Abrundung aufgehoben wird. Durch Aufhebung der Abrundung werden aber alle andere Inflexionspunkte unbeeinflusst als diejenige, welche in der genannten Weise in O hineinfallen.

Es findet sich also auf O ebenso viele isolierte Inflexionspunkte als Tangenten aus O an (O) gehen.

Der Satz bleibt gültig auch, wenn die Tangenten in O Wendetangenten sind. Sind sie z. B. beide Wendetangenten, gehen ausser diesen keine andere Tangenten durch O, und nur die in O fallenden Inflexionspunkte sind auf (O) isoliert.

In Verbindung mit (3) und (8) steht noch der folgende Satz, den wir im folgenden zu gebrauchen haben.

(9) Ein Doppelpunkt O ist auf der zugehörigen Schleife ein Winkelpunkt erster, zweiter oder dritter Art, jenachdem 2, 1 oder 0 der Tangenten in O die Schleife ausserhalb O schneiden.

Es schneide eine in O berührende Tangente t die Schleife (O) in einem Punkte N. Eine t benachbarte Tangente an (O) wird dann (O) in einem N benachbarten Punkte schneiden; weil aber (O) paar ist, schneidet t noch (O) in einem anderen Punkte, und dieser muss O benachbart sein, weil sonst auch t die Schleife in zwei ausserhalb O liegenden Punkten schneiden würde. Wenn aber t nicht (O), sondern den anderen zu O gehörigen Pseudozweig γ_2 schneidet, dann wird auch eine t benachbarte Tangente an (O) den Zweig γ_2 in einem O benachbarten Punkte schneiden, und könnte deshalb keinen Punkt mit (O) gemein haben. Erinnern wir uns nun die Seite 15 gegebenen Definitionen der verschiedenen Arten von Winkelpunkten, ist hiermit der Satz bewiesen.

Wir sind jetzt hinreichend ausgerüstet um die Kurven vierter Gattung klassificieren zu können. Es gibt infolge (6) zwei Unterabteilungen, jenachdem die Kurve drei oder zwei Schleifen hat.

---

§ 11.

Kurven vierter Ordnung mit drei Schleifen.

Eine Kurve vierter Ordnung mit drei Schleifen muss nothwendigerweise der vierten Gattung angehören.

Die drei Schleifen seien (O_1), (O_2) und (O_3), welche den Doppelpunkten O_1, O_2 und O_3 angehören mögen. Die Kurve kann ausser diesen keine andere Doppelpunkte haben, weil aus einem vierten Doppelpunkte drei Tangenten der Kurve gehen würden (§ 10 (5)). Sie besteht also aus den drei Schleifen und einer doppelpunktsfreien Restkurve ρ. Weil aus O_1 eine Tangente an (O_2) und eine an (O_3) geht, kann durch O_1 keine (O_1) ausserhalb O_1 berührende Tangente gehen. Eine Schleife enthält deshalb nach § 10 (8) keinen isolierten Inflexionspunkt. Aus demselben Grunde folgt noch aus § 10 (9), dass jeder Doppelpunkt ein Winkelpunkt dritter Art auf der zugehörigen Schleife ist.

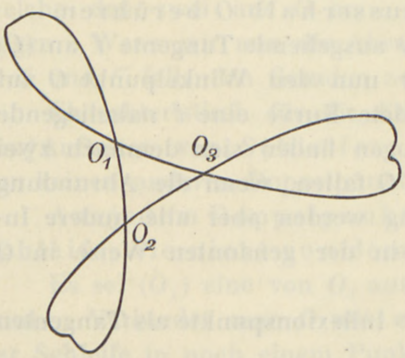

Fig. 17.

(1) Die Kurve besteht aus drei Schleifen und einer Restkurve, welche aus drei Elementarbögen zusammengesetzt ist.

Die drei Bögen, aus welchen ρ zusammengesetzt ist, sind diejenigen Bögen $O_1O_2 = \alpha$, $O_2O_3 = \beta$, $O_3O_1 = \gamma$, welche keine Schleife enthalten. Weil jeder Doppelpunkt auf ρ ein Winkelpunkt erster Art ist, wird eine Tangente an α, welche einer in O_1 berührenden Tangente t_1 dieses Bogens benachbart ist, mit der Restkurve noch zwei Punkte gemein haben, nämlich ausser einem O benachbarten Punkt von γ noch einen Punkt N. Dieser Punkt muss aber auf β liegen. Wenn nämlich eine Tangente t auf α rollt, kann dabei kein Schnittpunkt mit ρ von einem der Bögen α, β, γ auf einen anderen übergehen, weil durch O_1, O_2 oder O_3 keine Tangente dieser Bögen geht. Wenn aber t in eine Nachbarstellung zu einer Tangente an α in O_2 gelangt, liegt dem obigen zufolge ein Schnittpunkt in β. Man sieht also, dass eine Tangente an ρ nur diejenige zwei Bögen schneidet, auf denen der Berührungspunkt der Tangente nicht liegt. Es müssen deshalb α, β und γ Elementarbögen sein.

Die Kurve hat keine andere Doppeltangenten zweiter Art als die drei, welche zwei Schleifen berühren, und ausser diesen nur Doppeltangenten erster Art mit den zugehörigen Inflexionspunkten. Diese liegen alle auf den Schleifen, und die Kurve hat keinen isolierten Inflexionspunkt. (2)

Die in diesem Satze aufgestellten Behauptungen sammeln nur das obige. Dass insbesondere die Restkurve keine Tangente mit einer Schleife gemein haben kann, folgt schon daraus, dass eine solche Gerade mehr denn vier Punkte mit der Kurve gemein haben würde.

Es kann jetzt kein Zweifel über das Aussehen der Kurve entstehen. Erstens kann man im projectiven Sinne die Kurve als im Endlichen liegend annehmen. Die Verbindungsgerade zweier der Doppelpunkte hat keinen weiteren Punkt mit der Kurve gemein. Eine Schleife z. B. (O_1) liegt also auf derjenigen Seite der Gerade $O_1 O_2$, die nicht O_3 enthält, weil die Restkurve ρ durch diesen Punkt geht. Es liegt also ρ ganz innerhalb des endlichen Dreiecks $O_1 O_2 O_3$.

Einen direkten Existenzbeweis werden wir später geben.

Es kann eine Schleife sich so zusammenziehen, dass eine Spitze entsteht. Insbesondere können so drei Spitzen entstehen. Man erhält in der Weise die einzige Kurve vierter Ordnung mit drei Spitzen. Wenn nämlich die Kurve drei solche Punkte hat, gehen durch jeden von diesen zwei Gerade, welche die Kurve in zwei zusammenfallenden Punkten schneiden. Die Kurve wird also der vierten Gattung angehören. Man kann dann weiter der Kurve durch eine kleine Variation mit kleinen Schleifen versehen.

Man erhält so den Satz:

Wenn eine Elementarkurve vierter Ordnung drei Spitzen haben soll, müssen diese alle erster Art sein, und die Kurve wird ausser diesen keine andere Singularitäten haben, und sie wird aus drei Elementarbögen zusammengesetzt sein. (3)

Die drei Doppelpunkte können auch alle in einen dreifachen Punkt zusammenfallen. Diese Kurve und die in § 8, Seite 38, genannte sind die einzigen Elementarkurven vierter Ordnung, welche einen dreifachen Punkt haben können.

§ 12.

Kurven vierter Ordnung mit zwei Schleifen und mit lauter Doppelpunkten zweiter Art.

Von diesen Kurven betrachten wir zuerst diejenigen, welche einen und nur einen Doppelpunkt O haben. Sie sind sogleich durch den folgenden Satz charakterisiert:

(1) Eine Kurve vierter Ordnung vierter Gattung mit einem und nur einem Doppelpunkte zweiter Art ist aus zwei Schleifen zusammengesetzt. Die durch die Schleifen begrenzten Gebiete haben keinen Punkt mit einander gemein. Sie hat zwei Doppeltangenten zweiter Art und zwei isolierte Inflexionspunkte; sonst nur Doppeltangenten erster Art mit den zugehörigen Inflexionspaaren.

Die Kurve hat zwei und nur zwei Doppeltangenten zweiter Art infolge § 10 (4). Hieraus folgt schon, in Verbindung mit § 10 (1), dass die durch die Schleifen begrenzten endlichen Gebiete keinen Punkt mit einander gemein haben. Dass sie zwei und nur zwei isolierte Inflexionspunkte hat, folgt aus § 10 (8); berühren die zwei aus O ausgehenden Tangenten beide dieselbe Schleife, dann liegen beide isolierte Inflexionspunkte auf einer der Schleifen, sonst liegt ein auf je einer der Schleifen. Dass andere Inflexionspunkte nur in Paaren auftreten können, sieht man leicht in der schon oft benutzten Weise durch Abrundung des Winkelpunktes und Wiederaufhebung der Abrundung.

In O kann eine der Tangenten, oder auch beide, eine Wendetangente sein. In O fällt dann ein — oder auch zwei — isolierte Inflexionspunkte. Eine der Schleifen kann sich so zusammenziehen, dass eine Spitze entsteht.

Wir gehen nun zu den Kurven mit mehreren Doppelpunkten über. Es seien diese $O_1, O_2 \ldots O_n$, wo die Schleifen den Doppelpunkten O_1 und O_n entsprechen mögen; wir werden aber diese Schleifen mit einer Änderung der früheren Bezeichnungen als (O_1) und (O_{n+1}) benennen. Schneiden wir nun (O_1) von der Kurve ab, bleibt eine Restkurve γ_1, und runden wir auf dieser den Winkelpunkt O_1 ab, wird die abgerundete Kurve ρ_1 wieder zwei Schleifen haben müssen. Die eine von diesen ist (O_{n+1}); die andere muss, weil die Kurve durch die Abrundung nur in unmittelbarer Nähe von O_1 verändert worden ist, aus zwei von O_1 ausgehenden Bögen gebildet werden, welche O_1 mit einem anderen Doppelpunkte O_2 verbinden. Hebt man die Abrundung wieder auf, sieht man, dass die ursprüngliche Kurve eine „uneigentliche Schleife" (O_2) enthalten muss, welche aus zwei einander nicht schneidenden Bögen O_1O_2 gebildet wird, und welche zwei Winkelpunkte in O_1 und O_2 hat. Die früheren Schleifen sollen, in Gegensatze zu den jetzt eingeführten uneigentlichen Schleifen, die eigentlichen Schleifen heissen.

Durch Fortsetzung des Verfahrens sieht man nun:

(2) Hat die betrachtete Kurve n Doppelpunkte, besteht sie aus zwei eigentlichen und $n-1$ uneigentlichen Schleifen.

Man hat ferner:

Ein Winkelpunkt auf einer uneigentlichen Schleife ist immer zweiter Art, es sei denn, dass die Schleife einer eigentlichen Schleife benachbart ist, in welchem Fall er entweder erster oder auch zweiter Art sein kann. (3)

Wir betrachten erstens einen Doppelpunkt O_1, der auf einer eigentlichen Schleife (O_1) liegt. Durch O_1 geht eine Tangente an die andere eigentliche Schleife, und also entweder eine oder auch keine Tangente an (O_1). Jenachdem der eine oder der andere Fall eintritt, wird infolge § 10 (3) und (9) O_1 auf (O_1) ein Winkelpunkt zweiter oder dritter Art, also auf (O_2) entweder zweiter oder erster Art sein.

Es sei nun (O_r) eine uneigentliche Schleife wo r eine der Zahlen 2, 3, 4 . . $n - 2$ ist. Lassen wir die uneigentlichen Schleifen $(O_1)(O_2)\,.\,.\,(O_{r-1})$ weg, bleibt eine Restkurve derselben Gattung, wenn wir in O_{r-1} den Winkelpunkt abrunden. Durch O_r geht eine Tangente an (O_{n+1}); die andere durch O_r an die Restkurve gehende Tangente muss aber eine der Gerade O_rO_{r-1} benachbarte Gerade sein, denn nach § 10 (2) ist O_rO_{r-1}, in O_{r-1} eine uneigentliche Tangente der uneigentlichen Schleife (O_r). An die abgerundete Schleife (O_r) geht also durch O_r eine und nur eine (eigentliche) Tangente, welche ausserhalb O_r berührt. Nach § 10 (9) folgt daraus, dass O_r auf (O_r) ein Winkelpunkt zweiter Art ist, und es kann dies durch Aufhebung der Abrundung in O_{r-1} nicht geändert werden.

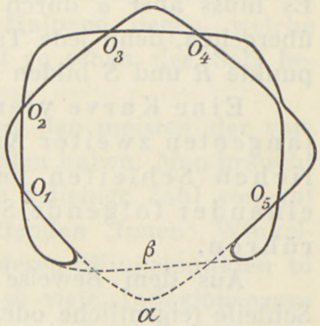

Fig. 18.

Die Kurve hat zwei und nur zwei isolierte Inflexionspunkte und diese liegen entweder auf den eigentlichen oder auf den diesen benachbarten uneigentlichen Schleifen. Keine Schleife, gleichviel ob eigentliche oder uneigentliche, kann mehr denn einen isolierten Inflexionspunkt haben. (4)

Die eigentliche Schleife (O_1) mit der uneigentlichen Nachbarschleife (O_2) zusammen bildet eine Kurve vierter Gattung, welche, wenn O_2 abgerundet wird infolge (1) zwei isolierte Inflexionspunkte hat. Hebt man die Abrundung auf, geht eine von diesen verloren, weil O_2 auf (O_2) infolge (3) ein Winkelpunkt zweiter Art ist. Es gibt also entweder auf (O_1) oder auf (O_2) ein und nur ein isolierter Inflexionspunkt. Dasselbe gilt für (O_n) und (O_{n+1}). Auf (O_r), wo $r = 3, 4, \,.\,.\, n-1$ liegt aber kein isolierter Inflexionspunkt. Rundet man nämlich die zwei auf (O_r) liegende Winkelpunkte O_{r-1} und O_r ab, erhält man aus (O_r) eine Kurve (O'_r), deren Inflexionspunkte alle nur in Paaren vorkommen. Neu hinzugekommen sind durch die Abrundung zwei Inflexionspunkte R und S; es kommt darauf an zu zeigen, dass diese, die ja durch Aufhebung der Abrundung wieder verschwinden, ein Paar bilden. Es hat aber (O'_r) eine $\overline{O_rO_{r-1}}$ beliebig naheliegende Doppeltangente t^*, weil die Gerade O_rO_{r-1} sowohl in O_{r-1} wie in O_r eine uneigentliche Tangente an (O_r)

ist, und dieser Doppeltangente gehören R und S als ein Inflexionspaar an. Es seien α und β die zwei Bögen von (O_r), welche O_{r-1} mit O_r verbinden. Man sieht dann leicht, dass wenn die Tangente in O_{r-1} an α den Bogen β schneidet, dann auch die Tangente in O_r an α den Bogen β schneiden wird (durch O_{r-1} und durch O_r gehen keine Tangenten an α oder an β). Den Ausführungen über Winkelpunkten zufolge (siehe Seite 14) sieht man hieraus, dass R und S beide auf α liegen. Es muss aber α durch die Abrundung in einen zu t^* gehörigen inneren Bogen übergehen, denn jede Tangente an α schneidet β. Die auf α liegenden Inflexionspunkte R und S bilden also ein Paar.

(5) Eine Kurve vierter Gattung mit zwei Schleifen hat als Doppeltangenten zweiter Art 1) diejenige Tangente, welche die zwei eigentlichen Schleifen berührt, 2) diejenige Tangenten, welche zwei auf einander folgende Schleifen — eigenliche oder uneigentliche — berühren.

Aus dem Beweise der vorigen Satzes folgt, dass eine Gerade, welche eine Schleife (eigentliche oder uneigentliche) zweimal berührt, einen inneren Bogen bestimmt, so dass sie eine Doppeltangente erster Art ist.

Wir betrachten nun eine eigentliche Schleife (O_1). Diese kann nach § 10 (4) nur zwei Tangenten mit den anderen Schleifen gemein haben, und die eine von diesen Tangenten berührt nach § 10 (7) die andere eigentliche Sshleife (O_{n+1}). Wir haben nur nachzuweisen, dass die zweite Doppeltangente einen Berührungspunkt auf (O_2) haben muss. Es genügt dazu die Schleifen (O_3), $(O_4) \dots (O_{n+1})$ abzuschneiden und den Winkelpunkt in O_2 abzurunden. Die Restkurve hat dann infolge (1) zwei und nur zwei Doppeltangenten zweiter Art. Von diesen wird aber die eine, wenn die Abrundung aufgehoben wird, mit der durch O_2 an (O_1) gehenden Tangente t zusammenfallen, weil t eine uneigentliche Tangente von (O_2) in O_2 ist. Es bleibt also eine (O_1) und (O_2) berührende Tangente.

Wir schneiden nun (O_1) weg, und haben eine Restkurve derselben Gattung, für welche, wenn O_1 abgerundet wird, (O_2) eine eigentliche Schleife $(O_2)'$ wird. Hier haben $(O_2)'$ und (O_{n+1}) eine Tangente gemein, diese geht aber, sowie wir es schon oft gesehen haben, wenn die Abrundung aufgehoben wird, in die durch O_1 an (O_{n+1}) gehende Tangente über. Betrachtet man ferner die aus (O_2) und (O_3) zusammengesetzte Kurve sieht man ganz ähnlich wie oben, dass (O_2) und (O_8) eine und nur eine Tangente mit einander gemein haben.

Für die Formbestimmung einer Kurve vierter Gattung mit zwei Schleifen und mehreren Doppelpunkten gibt der folgende Satz die nöthigen Anhaltspunkte:

(6) Liegt die Kurve ganz im Endlichen — was durch Projektion immer erreicht werden kann — bilden die auf einander folgenden Doppelpunkte O_1, $O_2 \dots O_n$ einen konvexen Polygon, und die Kurve liegt ganz in den Dreiecken, welche von einer Polygonseite $O_{r-1}O_r$ und den Verlängerungen der Nachbarseiten über O_{r-1} und O_r hinaus begrenzt sind.

Wenn nämlich $O_1 O_2 \ldots O_n$ kein konvexer Polygon wäre, könnte man eine Gerade finden, welche mit vier Polygonseiten Punkte gemein hätte. Weil von den Schnittpunkten höchstent der eine auf $O_1 O_n$ liegen könnte, würde die Gerade nach § 1 (3) 6 Punkte mit der Kurve gemein haben.

Es müssen ferner die zwei Bögen, welche zwei auf einander folgende Doppelpunkte O_{r-1} und O_r mit einander verbinden, beide auf derselben Seite von $O_{r-1}O_r$ liegen, weil diese Gerade sowohl in O_{r-1} wie in O_r eine uneigentliche Tangente ist, und sie müssen in derjenigen durch $O_{r-1}O_r$ begrenzten Halbene liegen, welche O_{r-2} — oder O_{r+1} — nicht enthält. Hiermit ist wie leicht zu sehen der Satz bewiesen.

Eine wirkliche Konstruktion kann man — wie bei den meisten der vorhergehenden Kurven – durch zwei einander schneidende Ovalen haben. Man braucht nur von den auftretenden „uneigentlichen Schleifen" eine beliebige Zahl von auf einander folgenden auszulassen und dann die zwei auftretenden „freien" Winkelpunkte abzurunden. Rundet man auch einige von den anderen Winkelpunkten so ab, dass die Kurve nicht zerfällt, kann man der Kurve so viele Inflexionspaare zuerteilen, als man will (siehe Fig. 16).

Es muss doch bemerkt werden, dass man so nur diejenige Kurven erhält, deren isolierte Inflexionspunkte auf den eigentlichen Schleifen liegen, während sie nach der Teorie auch auf den benachbarten uneigentlichen liegen können.

---

§ 13.

Über eine Relation zwischen den Singularitäten einer Elementarkurve vierter Ordnung mit Doppeltangenten.

Auf einer Elementarkurve vierter Ordnung können, wie wir gesehen haben, die Zahlen der Inflexionspunkte w, der Doppelpunkte d, und der Doppeltangenten t beliebig gross sein, nur haben wir sie immer als endlich vorausgesetzt. Die Zahl der Rückkehrspunkte ist dagegen begrenzt, es können höchstens deren drei auftreten, und in diesem Falle ist sogleich

$$t = w = d = 0.$$

Eine bestimmte Zahl der Singularitäten hat man noch, wenn die Kurve keine Doppeltangenten hat. Es ist dann entweder:

$$t = 0;\ d = 2;\ w = 4,$$

$$\text{oder: } t = 0;\ d = 3;\ w = 2.$$

Wenn aber Doppeltangenten auftreten, während keine Rückkehrspunkte vorhanden sind, hat man immer die Relation

$$w = 2\,(t - d).$$

Dass, wenn $d = 0$, $w = 2t$, folgt sogleich aus den Entwickelungen in § 6. Man kann nun den Nachweis der genannten Relation auf diesen Fall durch passende

Abrundungen zurückführen. Hierbei ist jedoch wegen der eventuel auftretenden neuen Doppeltangenten und wegen des eventuellen Zerfallen der Kurve so viele Rücksichte zu nehmen, dass ein direktes Nachzählen einfacher ist.

Er sei t_1 die Zahl der Doppeltangenten erster Art; $w_1 = 2t_1$ ist dann die Zahl, der in Paaren auftretenden Inflexionen.

Eine Kurve dritter Gattung hat ebenso viele Doppeltangenten zweiter Art als Doppelpunkte, während isolierte Inflexionen nicht auftreten. Man hat also

$$w = 2t_1\,;\ t = t_1 + d;$$

ɔ: $$w = 2(t - d).$$

Bei den Kurven mit drei Schleifen fanden sich drei Doppeltangenten zweiter Art, nämlich diejenigen, welche zwei der Schleifen berühren, aber keine isolierte Inflexionen. Man hat also

$$w = 2t_1\,;\ t = t_1 + 3;\ d = 3$$

ɔ: $$w = 2(t - d).$$

Bei den Kurven vierter Gattung mit zwei Schleifen fanden wir, wenn die Kurve n Doppelpunkte hat, $n + 1$ Doppeltangenten zweiter Art, nämlich teils diejenigen Tangenten, welche die zwei Schleifen berühren, teils diejenigen neuen Tangenten, welche zwei auf einander folgende eigentliche oder uneigentliche Schleifen berühren.

Man hat also, indem die Kurve immer zwei isolierte Inflexionspunkte hat:

$$w = 2t_1 + 2;\ t = t_1 + n + 1;\ d = n$$

ɔ: $$w = 2(t - d).$$

Bei den Kurven vierter Ordnung können auch Schnabelspitzen auftreten aber höchstens deren zwei.

---

§ 14.

Die einteilige Elementarkurve vierter Klasse.

Die reciproke Polarfigur einer Elementarkurve ist wieder eine Elementarkurve. Um sämtliche einteilige Elementarkurven vierter Klasse zu erhalten braucht man also nur die Polarfiguren zu den im Vorhergehenden bestimmten Kurven vierter Ordnung zu nehmen. Man wird es übrigens für die Zeichnung einfacher finden die früheren Sätze als deren Endresultate anzuwenden; lässt man nämlich die Inflexionspaare aus, kann man direkt aus der Teorie die Zahl des Elementarbögen, aus denen die Kurve zusammengesetzt ist, ablesen.

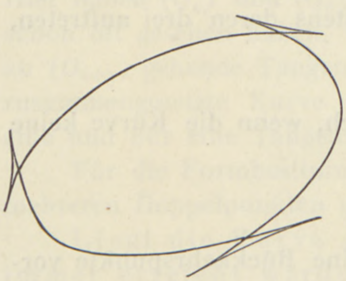

Fig. 19.

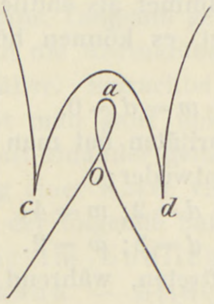

Fig. 20.

Wir werden hier nur in aller Kürze die Hauptformen angeben, und die Kurven so zeichnen, dass möglichst wenige Punkte unendlich fern liegen.

Die Kurven dritter Klasse können als bekannt angesehen werden. Die eine Hauptform ist vierter die andere sechster Ordnung. Die vollständige ein- oder zweiteilige Kurve ist immer sechster Ordnung.

Den Inflexionspaaren einer Kurve vierter Ordnung entsprechend kann auf einer Kurve vierter Klasse eine unbegrenzte Menge von „Kuspidalpaaren“ auftreten.

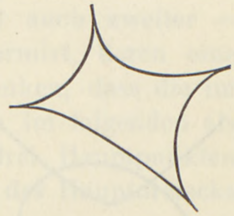

Fig. 21.

Die Hauptform einer Kurve vierter Klasse ohne Doppeltangenten findet sich in Fig. 19, sie ist in leicht verständlicher Weise aus einem Oval abgeleitet. Man darf aber nicht vergessen, dass die Kurve vierter Klasse nicht immer ins Endliche projicirt werden kann, denn es ist sehr möglich, dass an eine Kurve vierter Ordnung aus jedem Punkte ihrer Ebene eine Tangente geht. So bilden in Fig. 20 *c* und *d* ein Kuspidalpaar, während *oao* das Oval ist.

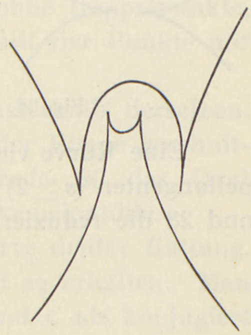

Fig. 22.

Im folgenden lassen wir durchgehend die Kuspidalpaare aus, und nennen die so auftretenden Formen reduzierte, ebenso wie die entsprechenden Kurven vierter Ordnung. Wir verteilen die Kurven vierter Klasse in Gattungen, welche den früheren Gattungen entsprechen sollen. Man wird nun leicht sehen:

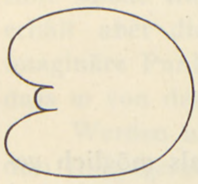

Fig. 23.

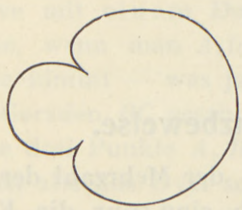

Fig. 24.

Die reduzierte Form einer Kurve vierter Klasse dritter Gattung ist mit der reduzierten Form einer Kurve vierter Ordnung derselben Gattung identisch.

Es sind also nur die Kurven zweiter und vierter Gattung zu betrachten.

Die Kurven zweiter Gattung haben keine Kuspidalpaare, aber entweder zwei oder auch drei Doppeltangenten. Im ersten Falle finden sich vier isolierte Rückkehrspunkte, und man hat zwei Haupttypen: die eine kann ganz ins Endliche projiciert werden, die andere nicht; siehe Fig. 21 und 22.

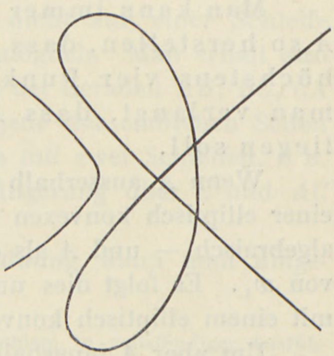

Fig. 25.

Eine Kurve dieser Gattung mit drei Doppeltangenten hat nur zwei Rückkehrspunkte und die Kurve lässt sich immer ganz ins Endliche projicieren. Den zwei früher in § 9 besprochenen Möglichkeiten entsprechend hat man die in Fig. 23 und Fig. 24 angegebenen Formen.

Einer Kurve vierter Ordnung mit drei Schleifen entspricht eine Kurve mit drei Doppeltangenten und drei Doppelpunkten. Die Kurve lässt sich nicht ins Endliche projicieren, und man hat die in Fig. 25 angegebene reducirte Form.

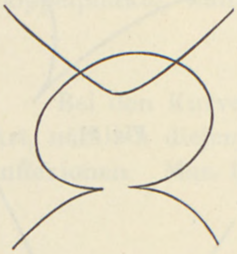

Fig. 26.

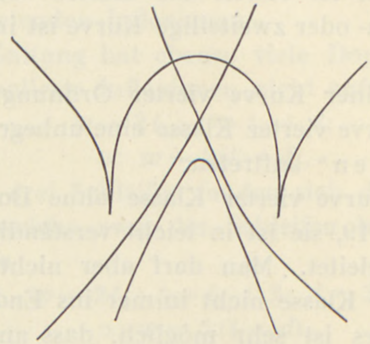

Fig. 27.

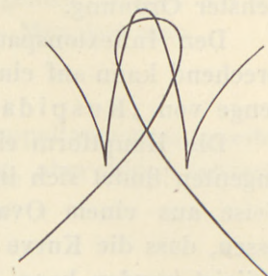

Fig. 28.

Eine Kurve vierter Klasse und vierter Gattung hat s Doppelpunkte, $s-1$ Doppeltangenten ($s \geqq 2$) und zwei isolierte Rückkehrspunkte. Ich gebe in Fig. 26, 27 und 28 die reduzierten Formen für $s = 2, 3$ und 5.

---

§ 15.

Nachträgliche Existenzbeweise.

Im Vorhergehenden haben wir schon von der Mehrzahl der als möglich gefundenen Typen Beispiele gegeben. Eigentlich sind nur die Kurven mit drei Schleifen ohne konstruktive Bestimmung gelassen. Diese — und Beispiele der andern, inklusive der Kurven dritter Ordnung — erhalten wir mittels einer quadratischen Tranformation, indem wir zuerst den folgenden Satz aufstellen:

Man kann immer ein nicht algebraisches Oval w und einen Punkt A so herstellen, dass w von jedem durch A gehenden Kegelschnitt in höchstens vier Punkten geschnitten wird, und das sowohl, wenn man verlangt, dass A innerhalb, wie auch, wenn er ausserhalb w liegen soll.

Wenn A ausserhalb w liegen soll, kann man w als die Centralprojektion einer elliptisch konvexen Ovales w_1 nehmen — w_1 existirt ja jedenfalls als nicht algebraisch — und A als das Bild eines unendlich fernen Punktes in der Ebene von w_1. Es folgt dies unmittelbaar daraus, dass ein Hyperbel oder ein Parabel mit einem elliptisch konvexen Oval höchstens vier Punkte gemein haben kann.

Um aber A innerhalb w zu bekommen wende man eine duale Transformation an; man nehme z. B. w als die Polarfigur eines elliptisch konvexen Ovales w_1 in Bezug auf einem Kreis, dessen Centrum ein innerhalb w_1 liegender Punkt A ist.

Es wird dann w ein Oval sein, der mit jedem durch A gehenden Kegelschnitt höchstens vier Tangenten gemein hat, und es wird desshalb nach § 4, Seite 25, auch höchstens vier Punkte mit diesen Kegelschnitten gemein haben.

Man erhält nun eine Kurve vierter Ordnung — eventuel auch zweiter — wenn man w durch eine quadratische Transformation transformirt, deren eine Hauptpunkt A ist, wobei wir uns immer w und A so gewählt denken, dass die im obigen Satze genannten Bedingungen erfüllt sind[1]. Wir nehmen im folgenden als quadratische Transformation eine solche involutorische mit drei Hauptpunkten A, B, C, dass jedem Hauptpunkte die gegenüberliegende Seite des Hauptdreiecks ABC entspricht.

Sind nun A, B, C so gewählt, dass keine der Geraden AB, BC und CA mit w Punkte gemein hat, erhält man eine Kurve vierter Ordnung ohne Doppelpunkte, sofern nur ein beliebiger durch A, B und C gehender Kegelschnitt vier Punkte mit w gemein hat.

Wählt man A innerhalb w, B oder C oder auch beide ausserhalb derselben, erhält man eine Kurve vierter Ordnung die von jeder Geraden der Ebene geschnitten wird, und also zweiter Gattung ist. Jenachdem die Gerade BC das Oval schneidet oder nicht schneidet, hat die Kurve drei oder zwei Doppelpunkte.

Liegen A, B und C alle innerhalb w, erhält man eine Kurve dritter Gattung. Eine solche Kurve mit einem Doppelpunkte kann man nicht so erhalten. Man erhält aber diese, wenn man A innerhalb w wählt, aber B und C als konjugiert imaginäre Punkte nimmt — was ja eben so gut geht; man muss nur dafür sorgen, dass w von der Geraden BC geschnitten wird.

Werden alle drei Punkte A, B und C ausserhalb w gewählt, aber so, dass die drei Hauptgeraden alle das Oval schneiden, erhält man eine Kurve vierter Gattung mit drei Doppelpunkten. Es fragt sich nur, wann man eine Kurve mit drei und wann eine mit zwei Schleifen erhält. Um dies abzumachen betrachte man einen Doppelpunkt O, der auf einer Schleife liegt; man kann dann der Kurve — nämlich der Schleife — entlang von O ausgehen und wieder zu O zurückkehren ohne einen anderen Doppelpunkt zu überschreiten. Wenn O nicht auf einer Schleife liegt, ist das aber bei den Kurven vierter Gattung nicht möglich. Man erhält also eine Kurve mit drei Schleifen, wenn die Schnittpunktepaare der Geraden AB, BC, CA mit w einander auf w nicht trennen, alzo z. B., wenn w jede der endlichen Seiten des Dreiecks ABC schneidet. Man erhält sonst eine Kurve mit zwei Schleifen, z. B. wenn AB in der Verlängerung über B, BC in der Verlängerung über C und AC in der Verlängerung über C von w geschnitten wird.

Aus der entwickelten Teorie der Kurven vierter Ordnung, kann man umgekehrt Sätze über elliptisch konvexen Ovalen herleiten.

[1] Für algebraische Kurven ist das vorliegende Transformationsproblem in vollständiger Ausführung gelöst vor A. Brill: Über rationale Curven vierter Ordnung, Math. Ann. Bd. XII, 1887 S. 90. Denkt man sich das Oval analytisch, könnte man etwas ähnlicher für das erweiterte Problem thun.

Ich erwähne beispielsweise:

Die Aufgabe eine Parabel zu bestimmen, welche ein elliptisch konvexes Oval dreipunktig berühren, und ausserdem zwei gegebene Gerade berühren soll, von welchen wenigstens die eine das Oval schneidet, hat 4 oder zwei Lösungen, jenachdem aus dem Schnittpunkte der Geraden keine oder auch zwei Tangenten an das Oval gehen.

Die Geraden liegen selbstverständlich in der Ebene des Ovales.

INHALT

DRUCKFEHLER

S. 134_7: einer Kvadrate, lies: eines Kvadrates.
- 134_6: des Umfange, lies: des Umfanges.
- 140^{10}: ist A, lies: ist 4.
- 165 Fussnote: ähnlicher, lies: ähnliches.